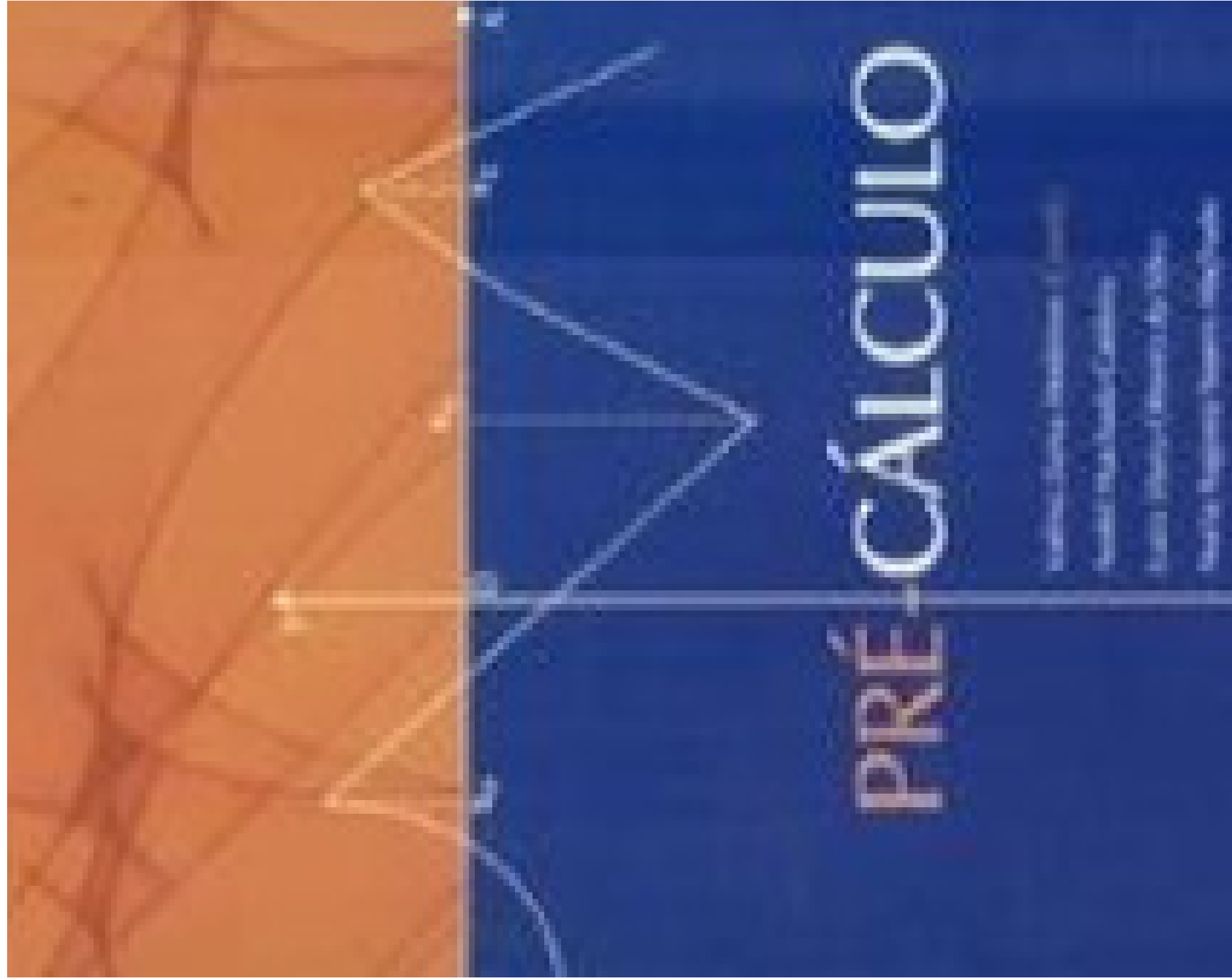


PRÉ

CÁLCULO

1. Introdução
2. Funções
3. Derivadas
4. Integrais



ERRATA

"Os exercícios de número 8, p. 10-11 e 12; 2, p. 38 e 39; 3, p. 44; 4, p. 44 e 45; 6, p. 61 e 62; 9 (a), p. 243 e 244 que integram unicamente a presente edição desta obra foram extraídos da apostila de *Matemática 1* dos autores Maria Augusta Soraes Machado, Luiza Maria Oliveira da Silva e Gerson Lachtermacher."

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Pré-cálculo / Valéria Zuma Medeiros (coord.);
André Machado Caldeira, Luiza Maria Oliveira da Silva,
Maria Augusta Soares Machado, (colaboradores). --
São Paulo: Cengage Learning, 2008.

1. reimpr. da 1. ed. de 2006.
ISBN 85-221-0450-6

1. Matemática - Estudo e ensino I. Medeiros,
Valéria Zuma. II. Caldeira, André Machado. III. Silva,
Luiza Maria Oliveira da. IV. Machado, Maria Augusta
Soares.

05-5853

CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática : Estudo e ensino 510.7

PRÉ-CÁLCULO

Valéria Zuma Medeiros (Coord.)

André Machado Caldeira

Luiza Maria Oliveira da Silva

Maria Augusta Soares Machado



Pré-Cálculo

Valéria Zuma Medeiros (Coord.)

Editora de Desenvolvimento: Ada Santos Seles

Supervisora de Produção Editorial: Patrícia La Rosa

Produtor Editorial: Fábio Gonçalves

Produtora Gráfica: Fabiana Alencar Albuquerque

Capicopete: Carmem Olivieri

Revisão: Maria Alice da Costa e Sandra Lia Farah

Composição: Cia. Editorial

Capa: Eduardo Bertolini

© 2006 Cengage Learning Edições Ltda.

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro poderá ser reproduzida, sejam quais forem os meios empregados, sem a permissão, por escrito, da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Para informações sobre nossos produtos, entre em contato pelo telefone **0800 11 19 39**

Para permissão de uso de material desta obra, envie seu pedido para **direitosautorais@cengage.com**

© 2006 Cengage Learning. Todos os direitos reservados.

ISBN-10: 85-221-0450-6

Cengage Learning

Condomínio E-Business Park
Rua Werner Siemens, 111 – Prédio 20 – Espaço 03
Lapa de Baixo – CEP 05069-900 – São Paulo – SP
Tel.: (11) 3665-9900 – Fax: (11) 3665-9901
SAC: 0800 11 19 39

Para suas soluções de curso e aprendizado, visite
www.cengage.com.br

Impresso no Brasil.

Printed in Brazil.

1 2 3 4 5 6 7 12 11 10 09 08

Sobre os Autores

André Machado Caldeira

- Graduado em Estatística pela Escola Nacional de Ciências Estatísticas (Ence) em 2003; mestre em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2005.
- Trabalhou na Credit Score e com análise de investimentos na Shell do Brasil e hoje atua na área de Planejamento Estratégico na Sul América Seguros.
- Possui artigos publicados nas áreas de Estatística, Pesquisa Operacional, Inteligência Computacional Aplicada e Econometria.

Luiza Maria Oliveira da Silva

- Graduada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense em 1987, mestra em Engenharia de Produção pela Universidade Federal Fluminense em 1996 e doutoranda em Inteligência Computacional Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Docente das Faculdades Ibmecc-RJ desde 1995, onde ministra aulas de Matemática no curso de graduação.
- Possui livros e artigos publicados nas áreas de Matemática, Estatística, Pesquisa Operacional e Inteligência Computacional Aplicada.

Maria Augusta S. Machado

- Graduada em Matemática pela Universidade Santa Úrsula em 1972; mestra em Matemática pela Universidade Federal Fluminense em 1978; doutora em Engenharia Elétrica pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 2000; com pós-doutorado em Inteligência Computacional Aplicada, em 2003, pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Trabalhou em empresas nas áreas de modelagem matemática, validação estatística de experimentos e logística. Professora das Faculdades Ibmecc-RJ desde 2000, onde ministra aulas de Matemática, Estatística, Métodos Quantitativos e Inteligência Computacional Aplicada na Graduação e Mestrado em Administração.

- Coordenadora do Projeto de Iniciação Científica – Pibic/CNPq – Ibmec; Coordenadora do Projeto de Logística El Paso Ibmec.
- Participa do Comitê Editorial da *Revista Pesquisa Naval* e tem livros e artigos publicados em revistas e congressos nacionais e internacionais nas áreas de Matemática, Estatística, Pesquisa Operacional e Inteligência Computacional Aplicada.

Valéria Zuma Medeiros (Coord.)

- Graduada em Matemática pela Universidade Federal Fluminense em 1984 e mestra em Engenharia de Produção pela Universidade Federal Fluminense, em 2003, tendo trabalhado em diversas faculdades particulares, como na Universidade Santa Úrsula e na Universidade Veiga de Almeida, entre outras.
- Professora da Universidade Federal Fluminense desde 1985, onde ministra aulas de Cálculo e Equações Diferenciais em diversos cursos de graduação.

Sumário

Capítulo 1 – Conjunto	1
1.1 Definição de conjuntos	1
1.2 Relação de pertinência	1
1.3 Descrição ou representação de um conjunto	1
1.4 Conjunto unitário	2
1.5 Conjunto vazio	2
1.6 Diagrama de Euler-Venn	2
1.7 Subconjuntos – relação de inclusão	3
1.7.1 Observações importantes	3
1.7.2 Conjunto das partes	3
1.8 Operações com conjuntos	4
1.8.1 União (reunião) de conjuntos	4
1.8.2 Interseção de conjuntos	4
1.8.3 Conjunto diferença	5
1.8.4 Conjunto universo ou universo (U)	5
1.8.5 Conjunto complementar	5
1.8.6 Diferença simétrica	6
1.8.7 Conjunto complementar em relação a U	6
1.8.8 Algumas propriedades	6
1.9 Exercícios resolvidos	7
1.10 Exercícios propostos	12
1.11 Respostas dos exercícios propostos	14
Capítulo 2 – Conjuntos numéricos	15
2.1 Tipos de números	15
2.1.1 Números naturais ($\mathbb{N}$)	15
2.1.2 Números inteiros ($\mathbb{Z}$)	15
2.1.3 Números fracionários ou racionais ($\mathbb{Q}$)	16

2.1.4 Números irracionais (decimais infinitos) ($\mathbb{I} = \mathbb{Q}'$)	16
2.1.5 Números reais ($\mathbb{R}$)	16
2.1.6 Números complexos ($\mathbb{C}$)	16
2.2 Números reais	17
2.2.1 Operações	17
2.2.2 Propriedades estruturais	17
2.2.3 Outras operações	18
2.3 Exercícios resolvidos	19
2.4 Exercícios propostos	21
2.5 Respostas dos exercícios propostos	22
2.6 Intervalos numéricos	23
2.6.1 Números reais e a reta numerada	23
2.6.2 Ordenação dos reais	24
2.6.3 Definições	24
2.6.4 Algumas propriedades	24
2.6.5 Intervalos numéricos	25
2.6.6 Desigualdades	26
2.6.6.1 Definições	26
2.6.6.2 Propriedades	27
2.6.7 Exercícios resolvidos	28
2.6.8 Exercícios propostos	31
2.7 Respostas dos exercícios propostos	32
Capítulo 3 – Potenciação	35
3.1 Definição	35
3.2 Propriedades	35
3.3 Exercícios resolvidos	38
3.4 Exercícios propostos	39
3.5 Respostas dos exercícios propostos	39
3.6 Valor absoluto ou módulo	40

3.6.1 Definição	40
3.6.2 Teoremas	40
3.6.3 Raiz quadrada	42
3.6.4 Exercícios resolvidos	43
3.6.5 Exercícios propostos	45
3.7 Respostas dos exercícios propostos	46
3.8 Polinômios	47
3.8.1 Definição	47
3.8.2 Valor numérico	47
3.8.3 Polinômio nulo	48
3.8.4 Grau	49
3.8.5 Igualdade	49
3.8.6 Operações	49
3.8.6.1 Adição de polinômios	49
3.8.6.2 Diferença de polinômios	50
3.8.6.3 Multiplicação por um número real (ou escalar)	50
3.8.6.4 Multiplicação de polinômios	50
3.8.6.5 Divisão de polinômios	51
3.8.7 Produtos notáveis e fatoração	54
3.8.7.1 Produtos notáveis	54
3.8.7.2 Completar quadrados	55
3.8.7.3 Fatoração	56
3.8.8 Equações polinomiais	56
3.8.8.1 Leis de cancelamento	57
3.8.8.2 Equação do 1º grau	57
3.8.8.3 Equação do 2º grau	58
3.8.9 Exercícios resolvidos	59
3.8.10 Exercícios propostos	63
3.9 Respostas dos exercícios propostos	65
Capítulo 4 – Relações	67
4.1 Par ordenado	67
4.2 Sistema cartesiano ortogonal	68
4.3 Produto cartesiano	70

4.4 Simetria de pontos	72
4.5 Distância entre dois pontos	73
4.6 Relação binária	74
4.7 Domínio e imagem	77
4.8 Relação inversa	78
4.9 Exercícios resolvidos	81
4.10 Exercícios propostos	84
4.11 Respostas dos exercícios propostos	87
4.12 Funções	90
4.12.1 Definição	92
4.12.2 Notação	93
4.12.3 Domínio e imagem	93
4.12.4 Funções iguais	95
4.12.5 Gráfico de uma função	95
4.12.6 Exercícios resolvidos	97
4.12.7 Exercícios propostos	100
4.13 Respostas dos exercícios propostos	102
Capítulo 5 – Funções do 1º grau	103
5.1 Definição	103
5.2 Função constante	103
5.3 Exercícios resolvidos	104
5.4 Função identidade	106
5.5 Função linear	107
5.6 Exercícios resolvidos	108
5.7 Função afim	109
5.8 Exercícios resolvidos	110
5.9 Coeficientes e zero da função afim	113
5.10 Exercícios resolvidos	113
5.11 Funções crescentes e decrescentes	115

5.12 Exercícios resolvidos	116
5.13 Sinais de uma função	119
5.14 Exercícios resolvidos	120
5.15 Equação de uma reta	122
5.16 Retas paralelas e perpendiculares	124
5.17 Interseção entre duas retas	126
5.18 Exercícios resolvidos	127
5.19 Exercícios propostos	140
5.20 Respostas dos exercícios propostos	144
Capítulo 6 – Relações quadráticas	157
6.1 Definição	157
6.2 Circunferência	157
6.3 Elipse	161
6.4 Parábola	165
6.5 Hipérbole	169
6.5.1 Hipérbole equilátera	172
6.6 Exercícios resolvidos	175
6.7 Exercícios propostos	201
6.8 Respostas dos exercícios propostos	202
Capítulo 7 – Inequações do 2º grau	211
7.1 Conceitos iniciais	211
7.2 Resolução de uma inequação do 2º grau	215
7.3 Exercícios resolvidos	216
7.4 Exercícios propostos	229
7.5 Respostas dos exercícios propostos	231
– 7.6 Função modular	234
7.6.1 Função definida por várias sentenças	234
7.6.2 Função modular	235

7.6.3 Exercícios resolvidos	236
7.6.4 Exercícios propostos	247
7.7 Respostas dos exercícios propostos	249
Capítulo 8 – Outras funções	257
8.1 Função par e função ímpar	257
8.2 Função $f(x) = x^3$	258
8.3 Função $f(x) = \frac{1}{x}$ ou função recíproca	259
8.4 Função máximo inteiro	260
8.5 Função composta	261
8.6 Funções injetora, sobrejetora e bijetora	262
8.7 Função inversa e função simétrica	265
8.8 Função exponencial	269
8.9 Função logarítmica	272
8.10 Exercícios resolvidos	276
8.11 Exercícios propostos	304
8.12 Respostas dos exercícios propostos	308
Capítulo 9 – Trigonometria	321
9.1 Introdução	321
9.2 Arcos e ângulos	321
9.3 Ciclo trigonométrico	323
9.4 Funções periódicas	325
9.5 Funções trigonométricas ou circulares	326
9.6 Função seno	327
9.7 Função cosseno	331
9.8 Função tangente	334
9.9 Função cotangente	337
9.10 Função secante e função cossecante	341

9.11 Relações fundamentais	346
9.12 Propriedades trigonométricas em triângulos	349
9.13 Funções trigonométricas simétricas (funções arco)	351
9.14 Exercícios resolvidos	356
9.15 Exercícios propostos	369
9.16 Respostas dos exercícios propostos	370
Capítulo 10 – Aplicações	377
10.1 Conceitos econômicos	377
10.2 Exercícios resolvidos	382
10.3 Exercícios propostos	400
10.4 Respostas dos exercícios propostos	404
Capítulo 11 – Álgebra matricial	411
11.1 Definições iniciais	411
11.2 Matrizes especiais	412
11.3 Igualdade de matrizes	414
11.4 Adição de matrizes	414
11.5 Multiplicação de um escalar por uma matriz	416
11.6 Matriz transposta	417
11.7 Produto de matrizes	418
11.8 Inversa de uma matriz	420
11.9 Determinante de uma matriz	421
11.9.1 Determinante de 1ª ordem	421
11.9.2 Determinante de 2ª ordem	421
11.9.3 Determinante de 3ª ordem	422
11.10 Exercícios resolvidos	427
11.11 Exercícios propostos	436
11.12 Respostas dos exercícios propostos	439

Conjunto

Capítulo 12 – Sistemas lineares	443
12.1 Introdução	443
12.2 Matrizes de um sistema	444
12.3 Solução de um sistema linear	444
12.4 Determinante do sistema	445
12.5 Regra de Cramer	446
12.6 Sistemas equivalentes	448
12.7 Escalonamento de sistemas	449
12.8 Exercícios resolvidos	452
12.9 Exercícios propostos	454
12.10 Respostas dos exercícios propostos	456
Capítulo 13 – Binômio de Newton	459
13.1 Fatorial	459
13.2 Coeficientes binomiais	459
13.3 Triângulo de Pascal	461
13.4 Binômio de Newton	464
13.5 Termo geral	465
13.6 Exercícios resolvidos	466
13.7 Exercícios propostos	470
13.8 Respostas dos exercícios propostos	473

Acesse o site www.cengage.com.br, na página do livro, e obtenha material de apoio suplementar, "Exercícios Resolvidos", para professores e alunos.

Este capítulo tem por objetivo habilitar o aluno para lidar com os conjuntos numéricos e suas operações, principalmente pela sua importância para o processo de contagem. Além disso, uma grande parte da matemática é desenvolvida a partir de conjuntos.

1.1 Definição de conjuntos

Trata-se de uma noção primitiva, sem definição própria, podendo o conjunto ser considerado qualquer coleção de objetos ou entidades.

Os objetos que compõem a coleção são os *elementos* do conjunto. Designamos, normalmente, por letras maiúsculas os conjuntos e por letras minúsculas seus elementos.

1.2 Relação de pertinência

Relaciona elemento com conjunto. Para indicarmos que um objeto x é elemento do conjunto A , escrevemos $x \in A$ (lê-se: x pertence a A). Se o objeto x não for elemento do conjunto A , escrevemos $x \notin A$ (lê-se: x não pertence a A).

1.3 Descrição ou representação de um conjunto

Para a descrição de um conjunto, são utilizados dois recursos principais:

1º Enumeração:

Quando escrevemos entre chaves, e separados por vírgulas, os seus elementos formadores do conjunto.

Exemplos:

a) $A = \{a, b, c\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $C = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

2ª Compreensão:

Quando escrevemos, entre chaves, uma característica comum a todos os elementos formadores do conjunto.

Exemplos:

a) $A = \{x \mid x \text{ é divisor inteiro de } 7\} = \{-7, -1, 1, 7\}$

b) $B = \{x \mid x \text{ é vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}$

1.4 Conjunto unitário

É o conjunto que possui apenas um elemento.

Exemplos:

a) $A = \{x \mid x \text{ é par compreendido entre } 9 \text{ e } 11\} = \{10\}$

b) $B = \{x \mid x \text{ é satélite natural da Terra}\} = \{\text{Lua}\}$

1.5 Conjunto vazio

É o que não possui elementos e denota-se por $\{\}$ ou $\emptyset$.

Exemplos:

a) $A = \{x \mid x^2 = 9 \text{ e } x \text{ é par}\} = \emptyset$

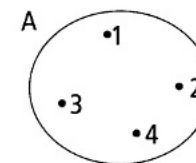
b) $B = \{x \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de } 2\} = \emptyset$

1.6 Diagrama de Euler-Venn

Uma boa maneira de se visualizar as relações entre conjuntos é por meio dos diagramas de Euler-Venn. Os conjuntos são representados por regiões planas interiores a uma curva fechada e simples.

Exemplo:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$



1.7 Subconjuntos – relação de inclusão

Se todo elemento de um conjunto A também for um elemento de um conjunto B , então podemos dizer que A é um *subconjunto* de B .

Para indicarmos que A é subconjunto de B , escreveremos:

- $A \subset B$ (lê-se: A está contido em B);
- $B \supset A$ (lê-se: B contém A);
- A é parte de B .

Se o conjunto A não for subconjunto de B , escreveremos $A \not\subset B$ (lê-se: A não está contido em B).

1.7.1 Observações importantes

- Todo conjunto é subconjunto dele mesmo ($A \subset A$).
- $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto ($\emptyset \subset A$).
- O total de subconjuntos que podemos formar a partir de um conjunto A , constituído por n elementos, é dado por 2^n , e denota-se por $\#A$ ($\#A = 2^n$).
- $A \subset B$ e $B \subset A$ se, e somente se, $A = B$.
- A é *subconjunto próprio* de B se, e somente se, $A \subset B$ e $A \neq B$.

1.7.2 Conjunto das partes

Consideremos um conjunto A . Denominamos *conjunto das partes* ($P(A)$) o conjunto formado por *todos* os subconjuntos de A .

Exemplo:

Seja $A = \{1, 2, 3\}$. Então:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

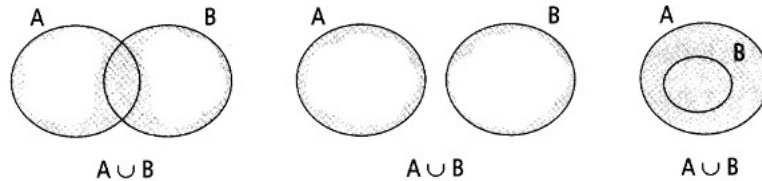
Observe que, por exemplo, $\{1, 2\} \subset A$, mas $\{1, 2\} \in P(A)$.

1.8 Operações com conjuntos

1.8.1 União (reunião) de conjuntos

O conjunto P é a união dos conjuntos A e B , se todos os elementos de A e B , e apenas estes, estiverem presentes em P .

$$P = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Exemplos:

a) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

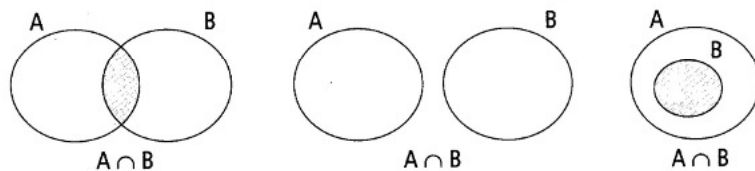
b) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 4\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} = A$.

c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1.8.2 Interseção de conjuntos

P é o conjunto interseção de A e B , se ele for composto por todos os elementos comuns a A e B , ao mesmo tempo.

$$P = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



Exemplos:

a) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, então $A \cap B = \{2, 4\}$.

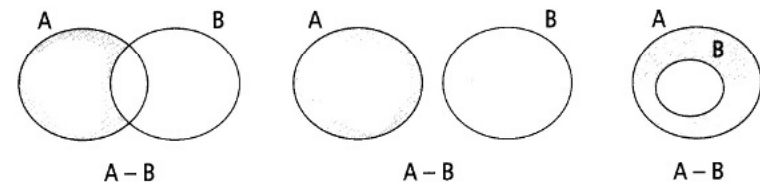
b) Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 4\}$, então $A \cap B = \{1, 4\} = B$.

c) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, então $A \cap B = \emptyset$. Nesse caso, A e B são chamados *conjuntos disjuntos*.

1.8.3 Conjunto diferença

P é o conjunto diferença de A e B , se for composto pelos elementos de A que não são elementos de B .

$$P = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$, então $A - B = \{1, 3\}$ e $B - A = \{6\}$.

1.8.4 Conjunto universo ou universo (U)

É um conjunto especificado que contém todos os elementos de interesse para um determinado problema.

1.8.5 Conjunto complementar

- Se $B \subset A$, então o complementar de B em relação a A é o conjunto $A - B$, denotado por $C_A^B = A - B$.
- $C_U^A = A' = \bar{A} = U - A$.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 6, 9\}$, então $C_B^A = \{0, 6, 9\}$.

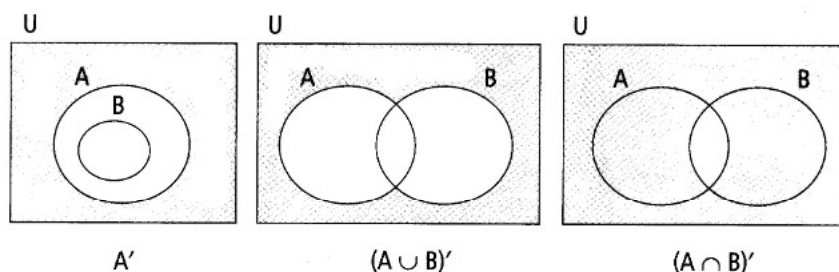
1.8.6 Diferença simétrica

Dados dois conjuntos A e B , chamamos diferença simétrica entre A e B o conjunto denotado por $A \Delta B$ e definido por $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Exemplo:

Se $A = \{1, 2, 4, 7\}$ e $B = \{1, 3, 6, 7, 10\}$, então $A \Delta B = \{2, 4\} \cup \{3, 6, 10\} = \{2, 3, 4, 6, 10\}$.

1.8.7 Conjunto complementar em relação a U



1.8.8 Algumas propriedades

União 1	$A \cup A = A$
União 2	$A \cup \emptyset = A$
União 3	$A \cup B = B \cup A$
União 4	$A \cup U = U$
Interseção 1	$A \cap A = A$
Interseção 2	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Interseção 3	$A \cap B = B \cap A$
Interseção 4	$A \cap U = A$
Diferença 1	$A - A = \emptyset$
Diferença 2	$A - \emptyset = A$
Diferença 3	$A - B \neq B - A$, em geral
Diferença 4	$U - A = A'$

Complementar 1	$(A')' = A$
Complementar 2	$\emptyset' = U$
Complementar 3	$U' = \emptyset$
Complementar 4	$(A \cup B)' = A' \cap B'$
Complementar 5	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

1.9 Exercícios resolvidos

1) Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 5\}$, pede-se para escrever simbolicamente as sentenças a seguir, classificando-as em verdadeiras (V) ou falsas (F):

- 2 é elemento de A .
- 4 pertence a B .
- B é parte de A .
- 1 não é elemento de B .
- A é igual a B .

Solução:

- $2 \in A$. É verdadeira.
- $4 \in B$. É verdadeira.
- $B \subset A$. É falsa, pois $5 \in B$, mas $5 \notin A$.
- $1 \notin B$. É verdadeira.
- $A = B$. É falsa (pode-se usar o mesmo elemento 5 para verificar a falsidade).

2) Classifique em verdadeiras (V) ou falsas (F) as sentenças a seguir:

- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|--|
| a) $\{1\} \in \{1\}$ | e) $\emptyset \subset \emptyset$ | i) $\emptyset \subset \{1, 2, \{1\}\}$ |
| b) $\{1\} \subset \{1\}$ | f) $\{1\} \subset \{\{1\}, \{2\}\}$ | j) $\{\{1\}\} \subset \{1, 2, \{1\}\}$ |
| c) $1 \in \{1\}$ | g) $\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$ | k) $\emptyset \in \{\emptyset, 1, \{1\}\}$ |
| d) $\{1\} \in \{\{1\}, \{2\}\}$ | h) $\emptyset \in \{1, 2, \{1\}\}$ | l) $\emptyset \subset \{\emptyset, 1, \{1\}\}$ |

Solução:

- | | | |
|------|------|------|
| a) F | e) V | i) V |
| b) V | f) F | j) V |
| c) V | g) V | k) V |
| d) V | h) F | l) V |

3) Sendo $A = \{a, b, c, d\}$, determine $P(A)$.

Solução:

Como A tem quatro elementos, $P(A)$ tem $2^4 = 16$ elementos.Daí, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$ $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$.4) Dados os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $C = \{0, 5, 10, 15, 20\}$, determine:

- | | |
|----------------------|--|
| a) $A \cap B$ | h) $A \cup B \cup C$ |
| b) $A \cup B$ | i) $A \cap (B \cup C)$ |
| c) $A \cap C$ | j) $(A \cap B) \cup (B - A)$ |
| d) $C - A$ | k) $(A - B) \cap (C - A)$ |
| e) $B \cup C$ | l) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$ |
| f) $B - C$ | m) $(A - B) \cap (B \cup C)$ |
| g) $A \cap B \cap C$ | n) $(B - C) \cup (A - C) \cup (B - A)$ |

Solução:

- a) $A \cap B = \{6, 12\}$
 b) $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15\}$
 c) $A \cap C = \{10\}$
 d) $C - A = \{0, 5, 15, 20\}$
 e) $B \cup C = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20\}$
 f) $B - C = \{3, 6, 9, 12\}$
 g) $A \cap B \cap C = \{6, 12\} \cap \{0, 5, 10, 15, 20\} = \{\} = \emptyset$

$$h) A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15\} \cup \{0, 5, 10, 15, 20\} = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 20\}$$

$$i) A \cap (B \cup C) = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20\} = \{6, 10, 12\}$$

$$j) (A \cap B) \cup (B - A) = \{6, 12\} \cup \{3, 9, 15\} = \{3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$k) (A - B) \cap (C - A) = \{2, 4, 8, 10\} \cap \{0, 5, 12, 20\} = \{\}$$

$$l) (A \cap B) \cap (B \cup C) = \{6, 12\} \cap \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20\} = \{6, 12\}$$

$$m) (A - B) \cap (B \cup C) = \{2, 4, 8, 10\} \cap \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20\} = \{10\}$$

$$n) (B - C) \cup (A - C) \cup (B - A) = \{3, 6, 9, 12\} \cup \{2, 4, 6, 8, 12\} \cup \{3, 9, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 15\}$$

5) Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $C = \{2, 3\}$, determine:

- a) C_B^A b) C_B^C c) C_A^C

Solução:

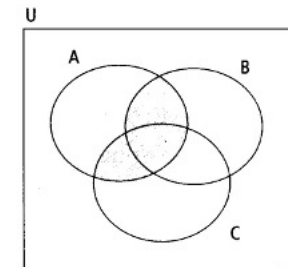
$$a) C_B^A = B - A = \{4, 5\}$$

$$b) C_B^C = B - C = \{1, 4, 5\}$$

$$c) C_A^C = A - C = \{1\}$$

6) A parte hachurada no diagrama representa:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| a) $A \cap (B \cup C)$ | d) $A \cup (B \cap C)$ |
| b) $(A \cap B) \cup C$ | e) $A \cap B \cap C$ |
| c) $(A \cup B) \cap C$ | |



Solução:

Letra *a*.

7) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par}\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é múltiplo de 3}\}$, determine se as afirmativas a seguir são verdadeiras, justificando:

- | | | |
|----------------|------------------|------------------------------------|
| a) $3 \in A$ | d) $15 \notin C$ | g) $B \cap C = \emptyset$ |
| b) $-3 \in B$ | e) $A \subset B$ | h) $(A \cap C) \cap B = \emptyset$ |
| c) $-12 \in C$ | f) $A \subset C$ | i) $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ |

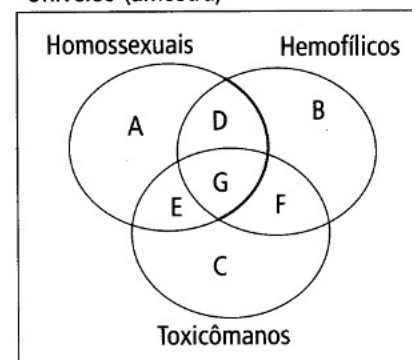
Solução:

- a) Verdadeiro, pois 3 é um número natural ímpar.
 b) Falso, pois (-3) não é um número natural.
 c) Falso, pois (-12) não é um número natural.
 d) Falso, pois 15 é um número natural múltiplo de 3.
 e) Verdadeiro, pois não existe nenhum número natural ímpar e par, ao mesmo tempo.
 f) Verdadeiro, pois existem números naturais ímpares que não são múltiplos de 3.
 g) Falso, pois existem números naturais pares que são múltiplos de 3, por exemplo, 12.
 h) Verdadeiro, pois $A \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar e múltiplo de 3}\}$.
 i) Verdadeiro, pois, embora alguns números naturais múltiplos de 3 sejam pares ou ímpares, os elementos de um conjunto podem ser repetidos.
- 8) Um laboratório de análises clínicas fez uma pesquisa tomando uma amostra de 75 pacientes, portadores do vírus HIV. Essa amostra foi classificada em três grandes grupos de risco: hemofílicos, homossexuais e toxicômanos, dos quais:
- 41 pacientes eram homossexuais;
 - 9 homossexuais e hemofílicos, não toxicômanos;
 - 7 homossexuais e toxicômanos, não hemofílicos;
 - 2 hemofílicos e toxicômanos, não homossexuais;
 - 6 apenas toxicômanos.

O número de pacientes apenas hemofílicos é igual ao número de pacientes apenas homossexuais. O número de pacientes pertencentes aos três grupos simultaneamente é a metade do número de pacientes que não foram classificados em nenhum dos grupos anteriores. Qual o número de pacientes que pertencem aos três grupos simultaneamente?

Solução:

Universo (amostra)



A comunidade pesquisada apresenta 75 pacientes:

$$U = 75$$

41 pacientes eram homossexuais:

$$A + D + G + E = 41$$

9 homossexuais e hemofílicos, não toxicômanos:

$$D = 9$$

7 homossexuais e toxicômanos, não hemofílicos:

$$E = 7$$

2 hemofílicos e toxicômanos, não homossexuais:

$$F = 2$$

6 apenas toxicômanos:

$$C = 6$$

Número de pacientes apenas hemofílicos igual ao número de pacientes apenas homossexuais:

$$A = B$$

O número de pacientes pertencentes aos três grupos simultaneamente é a metade do número de pacientes que não foram classificados em nenhum dos grupos anteriores:

$$G = \frac{75 - (A + B + C + D + E + F + G)}{2}$$

Com as informações anteriores, temos:

$$G = \frac{75 - (41 + A + 6 + 2)}{2} = 13 - \frac{A}{2}$$

Daí,

$$A + D + G + E = 41 \Rightarrow A + 9 + 13 - \frac{A}{2} + 7 = 41 \Rightarrow \boxed{A = 24}$$

Temos, então:

$$A = 24, B = 24, C = 6, D = 9, E = 7, F = 2, G = 1$$

1.10 Exercícios propostos

1) Dado $A = \{1, \{3, 2\}, 4\}$, determine se as afirmações a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F):

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| a) $\{3, 2\} \subset A$ | d) $\{4\} \subset A$ | g) $\{1, \{2, 3\}\} \subset A$ |
| b) $\{3, 2\} \not\subset A$ | e) $\{2, 3\} \in A$ | |
| c) $\{2\} \subset A$ | f) $\{1, \{3\}\} \subset A$ | |

2) Dentre as relações a seguir, determine as que são corretas. Para as que forem falsas, determine um contra-exemplo:

- | | |
|--|---|
| a) $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ | c) $A = B$ e $B = C \Rightarrow A = C$ |
| b) $A \not\subset B$ e $B \not\subset C \Rightarrow A \not\subset C$ | d) $A \neq B$ e $B \neq C \Rightarrow A \neq C$ |

3) Um conjunto A tem 18 subconjuntos. Determine o número de elementos de A .

4) Uma urna contém sete bolas de cores distintas. Determine o número de conjuntos distintos, não vazios, que podem ser formados com as bolas da urna.

5) Sendo dado um conjunto A com n elementos, indiquemos por a o número de subconjuntos de A . Seja B o conjunto que se obtém

acrescentando um novo elemento a A , e indiquemos por b o número de subconjuntos de B . Qual a relação entre a e b ?

6) Sejam os conjuntos $A = \{0, 2\}$, $B = \{-1, 4, 5\}$, $C = \{0, 3, 6\}$ e $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, determine $(A - B) \cap (C - D)$.

7) Se A e B são dois conjuntos não vazios, tais que $A - B = \{1, 3, 6, 7\}$, $B - A = \{4, 8\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determine o conjunto $A \cap B$.

8) Dados os conjuntos $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, determine o conjunto C , tal que $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

9) Sejam A , B e $A \cap B$ conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente. Determinar o número de elementos do conjunto $A \cup B$.

10) Um conjunto A tem 13 elementos, $A \cap B$ tem oito elementos e $A \cap B$ tem 15 elementos. Determinar o número de elementos de B .

11) Sejam A , B e C conjuntos finitos. O número de elementos de $A \cap B$ é 45; o número de elementos de $A \cap C$ é 40 e o número de elementos de $A \cap B \cap C$ é 25. Determinar o número de elementos de $A \cap (B \cup C)$.

12) Um curso possui 40 estudantes dos quais: 13 estudam física; 30, matemática; e 10, as duas disciplinas. Quantos não estudam nem física nem matemática?

13) Em uma escola ensina-se inglês e alemão. Sabe-se que cem alunos estudam as duas línguas; 130, só inglês; e 170, só alemão. Quantos alunos estudam inglês? E quantos alunos há na escola?

14) Em uma cidade há mil famílias, das quais 470 assinam o jornal A ; 420, o jornal B ; 315, o jornal C ; 140, B e C ; 220, A e C ; 110, A e B ; e 75 assinam os três. Determinar:

- quantas famílias não assinam jornal;
- quantas famílias assinam só um dos jornais;
- quantas famílias assinam só dois jornais;
- quantas famílias assinam pelo menos dois jornais;
- quantas famílias assinam no máximo dois jornais.

Conjuntos numéricos

- 15) Em uma cidade constatou-se que as famílias que consomem arroz não consomem macarrão. Sabe-se que 40% consomem arroz, 30% macarrão, 15% arroz e feijão, 20% macarrão e feijão e 60% consomem feijão. Determinar a porcentagem correspondente às famílias que não consomem esses produtos.

1.11 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a) F b) V c) F d) V e) V f) F g) V
- 2) a e c estão corretas. Um contra-exemplo para a letra b poderia ser os conjuntos $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ e $C = \{1,2,4\}$. Um contra-exemplo para a letra d poderia ser os conjuntos $A = \{1,2\} = C$, $B = \{2,3\}$.
- 3) Não existe um conjunto com tais condições.
- 4) $2^7 - 1 = 127$
- 5) Se $\# A = n$, então $a = 2^n$. Se $\# B = n + 1$, então $b = 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2 \cdot a$. Daí, $b = 2 \cdot a$.
- 6) $\{0\}$
- 7) $\{2,5\}$
- 8) $\{2,4,6\}$
- 9) 110
- 10) 10
- 11) 60
- 12) 7
- 13) $230 / 400$
- 14) $190 / 490 / 245 / 320 / 925$
- 15) 5%

O objetivo deste capítulo é habilitar o aluno com a operação com os conjuntos numéricos e suas propriedades.

2.1 Tipos de números

2.1.1 Números naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é de grande importância pelo seu uso na contagem. Por exemplo, o número de dedos da mão de um ser humano, o número de animais em uma fazenda etc.

Sua notação é $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.

Quando não se considera o elemento zero (0), a notação utilizada é $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1,2,3,\dots\}$

2.1.2 Números inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é formado pelos elementos do conjunto dos naturais acrescidos de seus simétricos. Por exemplo, as temperaturas positivas podem ser representadas por números inteiros positivos ou pelo conjunto dos números naturais. As temperaturas negativas são representadas por números negativos.

A notação utilizada para o conjunto de números inteiros é $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Quando o elemento zero (0) não pertence ao conjunto, a notação se torna $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

Quando se considera somente o conjunto dos números inteiros positivos (que é equivalente ao conjunto dos números naturais), a notação é $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (inteiros não-negativos).

Quando o elemento zero (0) não pertence ao conjunto dos números inteiros positivos, temos $\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ (inteiros positivos).

Quando se considera somente o conjunto dos números inteiros negativos, a notação é $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -2, -1, 0\}$ (inteiros não-positivos).

Quando o elemento zero (0) não pertence ao conjunto dos números inteiros negativos, a notação se transforma em $\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$ (inteiros negativos).

2.1.3 Números fracionários ou racionais ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

São todos os números que podem ser escritos sob a forma de fração de números inteiros. Têm representação decimal finita ou periódica.

Exemplos:

- | | | |
|------------------|-------------|----------------|
| a) 2 | d) 0,6 | g) 1,5999... |
| b) -7 | e) 1,37 | h) 0,212121... |
| c) $\frac{2}{3}$ | f) 0,222... | i) $\sqrt{36}$ |

2.1.4 Números irracionais (decimais infinitos) ($\mathbb{I} = \mathbb{Q}'$)

São os números cuja representação decimal não é exata nem periódica, conseqüentemente não podendo ser escritos sob a forma de fração.

Exemplos:

- a) $\pi = 3,14159265\dots$ b) $\sqrt{2} = 1,4142135624\dots$ c) $e = 2,718281828\dots$

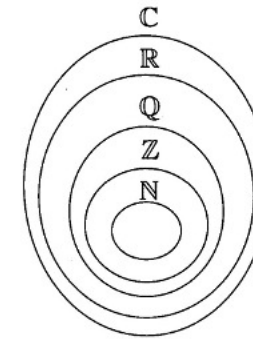
2.1.5 Números reais ($\mathbb{R}$)

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ onde } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

2.1.6 Números complexos ($\mathbb{C}$)

São os números que não são reais, isto é, as raízes de números negativos.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$



2.2 Números reais

2.2.1 Operações

Existem quatro operações básicas possíveis com o conjunto dos números reais:

- Adição $a + b$
- Multiplicação $a \times b$ ou $a \cdot b$
- Subtração $a - b$ ou $[a + (-b)]$
- Divisão a/b ou $a \cdot \frac{1}{b}$

2.2.2 Propriedades estruturais

As propriedades das quatro operações com o conjunto dos números reais são:

- Fechamento
Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(a + b) \in \mathbb{R}$
Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $(a \times b) \in \mathbb{R}$
- Propriedade comutativa
 $a + b = b + a$
 $a \times b = b \times a$

- Propriedade associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- Propriedade distributiva

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

- Elemento neutro

Na adição $a + 0 = a$

Na multiplicação $a \times 1 = a$

- Existência de simétrico ou oposto

$$a + (-a) = 0 \text{ Todo número real tem oposto.}$$

- Existência de inverso ou recíproco

Se $a \neq 0$, então $a \times \frac{1}{a} = a \times a^{-1} = 1$.

2.2.3 Outras operações

Além das operações básicas, podem ser utilizadas as propriedades anteriormente descritas, para se obter:

- Subtração

$$a - b = a + (-b), \text{ onde } (-b) \text{ é o simétrico de } b.$$

- Divisão

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}, \text{ onde } \frac{1}{b} \text{ é o inverso de } b.$$

2.3 Exercícios resolvidos

1) Determine se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações, justificando sua resposta:

a) $\frac{1}{5} \doteq 0,555\dots$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

b) $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{5}{12}$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

Solução:

a) Falsa, pois $0,555\dots = \frac{5}{9}$.

b) Falsa, pois $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{7 \cdot 5} = \frac{10 + 21}{35} = \frac{31}{35}$.

c) Falsa, pois $\sqrt{2} \cong 1,41$, $\sqrt{3} \cong 1,73$ e $\sqrt{2} + \sqrt{3} \cong 3,14$, que é diferente de $\sqrt{5} \cong 2,24$.

d) Verdadeira, pois $\sqrt{2} \cong 1,41$ e $\sqrt{3} \cong 1,73$. Logo, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cong 1,41 \cdot 1,73 \cong 2,45$ e $\sqrt{6} \cong 2,45$.

2) Determine a fração irredutível que é a geratriz de cada uma das dízimas periódicas:

a) 0,6666...

d) 2,888...

b) 0,325325325...

e) 2,95888...

c) 0,3252525...

Solução:

a) Como a parte inteira do número decimal é zero (0) e a parte periódica (número repetido), somente o algarismo 6, coloca-se no numerador esse número e no denominador um único algarismo 9, isto é, $0,666\dots = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

b) Como a parte inteira do número decimal é zero (0) e a parte periódica (os números repetidos), 325 (três algarismos), coloca-se no numerador esses três algarismos e no denominador três algarismos 9, isto é, $0,325325325\dots = \frac{325}{999}$.

c) Como a parte inteira do número decimal é zero (0) e a parte periódica, 25 (dois algarismos), e o algarismo 3 aparece sem repetição, coloca-se no numerador esses três algarismos subtraídos do algarismo 3 (que não está repetido) e no denominador dois algarismos 9 (apontando a repetição de 2 e 5) e zero (0), indicando a não-repetição do algarismo 3, isto é, $0,3252525... = \frac{325-3}{990} = \frac{322}{990} = \frac{161}{495}$.

d) Como a parte inteira do número decimal é 2 e a parte periódica, somente o algarismo 8, tem-se o número $2,888... = 2\frac{8}{9}$ (2 representando a parte decimal, 8 no numerador representando o algarismo repetido e um único algarismo 9 para indicar a repetição do 8, isto é, $2,888... = 2\frac{8}{9} = \frac{18+8}{9} = \frac{26}{9}$).

e) Como a parte inteira do número decimal é 2 e a parte periódica, somente o algarismo 8, e os algarismos 95 não são repetidos, tem-se, no numerador, 925 subtraído da parte não-repetida, 95. No denominador, o algarismo 9, para indicar a parte periódica, e dois zeros para indicar a parte não-periódica, isto é, $2,95888... = 2\frac{958-95}{900} = 2\frac{863}{900} = \frac{2.663}{900}$.

3) Calcule:

- | | |
|--|--------------------------------|
| a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2)$ | d) $(3 + \sqrt{2})^2$ |
| b) $(5 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2})$ | e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ |
| c) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})$ | |

Solução:

a) Aplicando-se a propriedade distributiva, tem-se:

$$\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3} + 2) = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}) + (\sqrt{3} \cdot 2) = (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} = 3 + 2\sqrt{3}$$

b) Aplicando-se a propriedade distributiva, tem-se:

$$(5 + \sqrt{2}) \cdot (5 - \sqrt{2}) = (5 \cdot 5) - (5\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} - (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 5^2 - (\sqrt{2})^2 = 25 - 2 = 23$$

c) Aplicando-se a propriedade distributiva, tem-se:

$$(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + 7\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 7\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 2 - 3\sqrt{6} + 7\sqrt{6} - 7 \cdot 3 = 4\sqrt{6} - 15$$

$$d) (3 + \sqrt{2})^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2} + 2 = 11 + 6\sqrt{2}$$

$$e) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2.4 Exercícios propostos

1) Determine se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações:

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $-7 \in \mathbb{N}$ | f) $3\pi \in \mathbb{R}$ | j) $\sqrt[3]{64} \in \mathbb{N}$ |
| b) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ | g) $-\pi \in \mathbb{I}$ | k) $-7 \in \mathbb{Z}$ |
| c) $5 \in \mathbb{Z}$ | h) $\frac{12}{2} \in \mathbb{Z}$ | l) $\pi^3 \in \mathbb{I}$ |
| d) $-8 \in \mathbb{Q}$ | i) $\sqrt{-7} \in \mathbb{I}$ | m) $\pi^3 \in \mathbb{Q}$ |
| e) $\sqrt{9} \in \mathbb{I}$ | | |

2) Quais das proposições a seguir são verdadeiras:

- | | |
|---|---|
| a) $0 \in \mathbb{N}$ | f) $\left(2 - \frac{7}{8}\right) \notin \mathbb{Q}$ |
| b) $0 \notin \mathbb{Z}$ | g) $\frac{15}{7} \in (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ |
| c) $-15 \notin \mathbb{Z}$ | h) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ |
| d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_+$ | i) $\mathbb{Q}_+^* \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ |
| e) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$ | j) $\{0\} \subset \mathbb{Q}$ |

3) Determine $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$, sabendo-se que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 7\}$.

4) Quantas unidades devemos diminuir de 5 para chegarmos a (-7)? E de (-7) para chegarmos a (-15)? E de 14 para chegarmos a 18?

5) Qual é o valor de $x = \sqrt{0,444...} + \frac{16}{0,888...}$?

6) Desenvolva:

a) $(3 + \sqrt{5})^2$ b) $(3 - \sqrt{5})^2$ c) $(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})$

7) Determine se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):

- a) O conjunto dos números naturais é finito.
 b) A soma de dois números irracionais pode ser um número irracional.
 c) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
 d) O produto de dois números irracionais pode ser um número racional.
 e) O produto de dois números irracionais é sempre um número racional.

8) Dada a equação $x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$, determine o número natural x que satisfaz essa equação.

9) Calcule o valor das expressões:

a) $\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \left(2 - \frac{1}{3}\right)$

b) $\frac{6 - 2,25 \cdot 0,2}{(2,2)^2 + 0,71}$

c) $\frac{(-2)^0 \cdot (-(-2)^3) \cdot 5}{(-3)^{-1} \cdot (-(-5)^{-2})}$

d) $0,0666... : 0,060606... + 3 : \frac{9}{2} \cdot 0,1$

e) $512^{0,555...}$

2.5 Respostas dos exercícios propostos

1) F, F, V, V, F, V, V, V, F, V, V, V, F

2) a, d, g, h, j

3) $A \cup B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$, $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 7\}$ e $A - B = \{8\}$.

4) 12; 8; (-4)

5) $\frac{56}{3}$

6) a) $2 \cdot (7 + 3\sqrt{5})$; b) $2 \cdot (7 - 3\sqrt{5})$; c) 4

7) a) F

b) V ($\pi + \pi = 2\pi \in \mathbb{I}$)

c) F ($\pi + (-\pi) = 0 \notin \mathbb{I}$)

d) V ($\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{100} = 10 \in \mathbb{Q}$)

e) F ($\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} \in \mathbb{I}$)

8) 4 (Sugestão: Eleve os dois membros ao quadrado.)

9) a) $\frac{7}{5}$

c) 3.000

e) 32

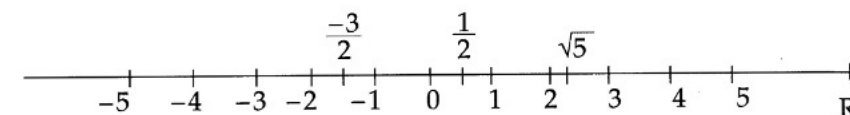
b) 1

d) 2

2.6 Intervalos numéricos

2.6.1 Números reais e a reta numerada

Existe uma correspondência biunívoca (um a um) entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta numerada.



O conjunto de todos os números reais pode ser representado por uma reta horizontal, chamada eixo orientado.

Na reta real, os números estão ordenados. Um número a é menor que qualquer número x , colocado à sua direita e maior que qualquer número y , colocado à sua esquerda.

2.6.2 Ordenação dos reais

No conjunto dos números reais, existe um subconjunto denominado números positivos, tal que:

- Se a for um número real, então *exatamente* uma das três afirmativas será verdadeira:
 - $a = 0$;
 - a é positivo;
 - $(-a)$ é positivo.
- A soma de dois números positivos é outro número positivo.
- O produto de dois números positivos é outro número positivo.

2.6.3 Definições

- O número real a é **negativo** se, e somente se, $(-a)$ for **positivo**.
- Símbolo $<$ significa *é menor que*.
 - $a < b$ se, e somente se, $b - a$ for positivo.
- Símbolo $>$ significa *é maior que*.
 - $a > b$ se, e somente se, $a - b$ for positivo.
- Símbolo $\leq$ significa *é menor ou igual a que*.
 - $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a = b$.
- Símbolo $\geq$ significa *é maior ou igual a que*.
 - $a \geq b$ se, e somente se, $a > b$ ou $a = b$.

2.6.4 Algumas propriedades

Propriedades de operações dos números reais, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

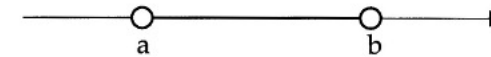
- 1) $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$
- 2) $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c$
- 3) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$
- 4) $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$

- 5) $a < b \Leftrightarrow a \pm c < b \pm c$
- 6) $a < b$ e $c < d \Rightarrow a + c < b + d$
- 7) $a < b$ e $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- 8) $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$
- 9) $a < b$ e $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$
- 10) $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)$
- 11) $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ e } b < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b > 0)$
- 12) $0 < b < a \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

2.6.5 Intervalos numéricos

São subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinados por desigualdades.

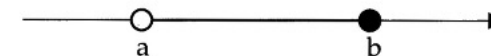
- Intervalo **aberto** de a a b , denotado por (a, b) , é o conjunto de todos os números reais, tais que $a < x < b$.



- Intervalo **fechado** de a a b , denotado por $[a, b]$, é o conjunto de todos os números reais, tais que $a \leq x \leq b$.



- Intervalo **semi-aberto** à esquerda de a a b , denotado por $(a, b]$, é o conjunto de todos os números reais, tais que $a < x \leq b$.



- Intervalo **semi-aberto** à direita de a a b , denotado por $[a, b)$, é o conjunto de todos os números reais, tais que $a \leq x < b$.



- Outros intervalos:

a) $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = [0, +\infty[$

b) $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty) =]0, +\infty[$

c) $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] =]-\infty, 0]$

d) $\mathbb{R}_-^* = (-\infty, 0) =]-\infty, 0[$

e) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty) =]-\infty, +\infty[$

f) $[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$



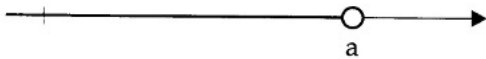
g) $(-\infty, a] =]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$



h) $(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$



i) $(-\infty, a) =]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$



2.6.6 Desigualdades

2.6.6.1 Definições

- Expressões do tipo:

$a < b$, $a > b$, $a \leq b$, $a \geq b$ são chamadas *desigualdades*.

26.6.2 Propriedades

- Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.

Exemplo: $3 < 6$ e $6 < 14$, então $3 < 14$.

- Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$.

Exemplo: $6 > 3$ e $3 > 2$, então $6 > 2$.

- Se $a < b$, então $a + c < b + c$.

Exemplo: $-1 < 2$, então $(-1) + (-3) < 2 + (-3)$, isto é, $-4 < -1$.

- Se $a > b$, então $a + c > b + c$.

Exemplo: $2 > -1$, então $2 + (-3) > (-1) + (-3)$, isto é, $-1 > -4$.

- Se $a < b$ e $c < d$, então $a + c < b + d$.

Exemplo: $4 < 7$ e $-4 < -2$, então $4 + (-4) < 7 + (-2)$, isto é, $0 < 5$.

- Se $a > b$ e $c > d$, então $a + c > b + d$.

Exemplo: $7 > 4$ e $-2 > -4$, então $7 + (-2) > 4 + (-4)$, isto é, $5 > 0$.

- Se $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$.

Exemplo: $-5 < -3$, então $(-5) \times 2 < (-3) \times 2$, isto é, $-10 < -6$.

- Se $a > b$ e $c > 0$, então $ac > bc$.

Exemplo: $-3 > -5$, então $(-3) \times 2 > (-5) \times 2$, isto é, $-6 > -10$.

- Se $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

Exemplo: $-5 < 1$, então $(-5) \times (-2) > 1 \times (-2)$, isto é, $10 > -2$.

- Se $a > b$ e $c < 0$, então $ac < bc$.

Exemplo: $1 > (-5)$, então $1 \times (-2) < (-5) \times (-2)$, isto é, $-2 < 10$.

- Se $0 < a < b$ e $0 < c < d$, então $ac < bd$.

Exemplo: $0 < 4 < 7$ e $0 < 8 < 9$, então $4 \times 8 < 7 \times 9$, isto é, $32 < 63$.

- Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$, então $ac > bd$.

Exemplo: $7 > 4 > 0$ e $9 > 8 > 0$, então $7 \times 9 > 4 \times 8$, isto é, $63 > 32$.

2.6.7 Exercícios resolvidos

1) Represente graficamente os intervalos a seguir e verifique se os números $5, \pi, \sqrt{5}, \frac{5}{2}, \left(-\frac{15}{7}\right)$ pertencem a cada intervalo:

- a) $[-2, 5)$ b) $(2, 7)$ c) $(6, +\infty)$

Solução:

Graficamente, temos:



- a) $5 \notin [-2, 5)$, pois tem-se o intervalo aberto em 5 (excluindo o algarismo 5 de pertencer ao conjunto); como $\pi = 3,1416$, $\pi \in [-2, 5)$, $\sqrt{5} \approx 2,2361 \in [-2, 5)$; $\frac{5}{2} = 2,5 \in [-2, 5)$; $-\frac{15}{7} \approx -2,1429 < -2$, isto é,

$$-\frac{15}{7} \notin [-2, 5).$$

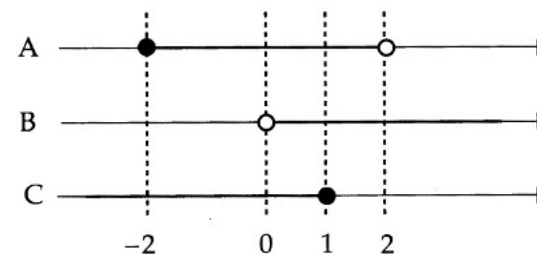
- b) $5 \in (2, 7)$; $\pi \in (2, 7)$; $\sqrt{5} \in (2, 7)$; $\frac{5}{2} \in (2, 7)$; $-\frac{15}{7} \notin (2, 7)$.

- c) $5 \notin (6, +\infty)$; $\pi \notin (6, +\infty)$; $\sqrt{5} \notin (6, +\infty)$; $\frac{5}{2} \notin (6, +\infty)$; $-\frac{15}{7} \notin (6, +\infty)$.

2) Dados os intervalos $A = [-2, 2)$, $B = (0, +\infty)$ e $C = (-\infty, 1]$, determinar:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| a) $A \cap B$ | g) $B \cup C$ |
| b) $A \cap C$ | h) $A \cup B \cup C$ |
| c) $B \cap C$ | i) $A - B$ |
| d) $A \cap B \cap C$ | j) $A - C$ |
| e) $A \cup B$ | k) $B - C$ |
| f) $A \cup C$ | |

Solução:



- a) Graficamente, podemos visualizar que os elementos do conjunto A estão no intervalo de todos os números entre -2 e 2 (excluindo o elemento 2). Os elementos do conjunto B estão no intervalo de todos os números maiores que zero, excluindo o zero. Logo, o elemento comum entre $A = [-2, 2)$ e $B = (0, +\infty]$ é o intervalo $(0, 2)$.
- b) Graficamente, podemos visualizar que os elementos do conjunto A estão no intervalo de todos os números entre -2 e 2 (excluindo o elemento 2). Os elementos do conjunto C estão no intervalo de todos os números menores ou iguais a 1 . Logo, o elemento comum entre $A = [-2, 2)$ e $C = (-\infty, 1]$ é o intervalo $[-2, 1]$.
- c) Graficamente, podemos visualizar que os elementos do conjunto B estão no intervalo de todos os números maiores que zero, excluindo o zero. Os elementos do conjunto C estão no intervalo de todos os números menores ou iguais a 1 . Logo, o elemento comum entre $B = (0, +\infty)$ e $C = (-\infty, 1]$ é o intervalo $(0, 1]$.
- d) Graficamente, podemos visualizar que os elementos do conjunto A estão no intervalo de todos os números entre -2 e 2 (excluindo o elemento 2). Os elementos do conjunto B estão no intervalo de todos os números maiores que zero, excluindo o zero. Os elementos do conjunto C estão no intervalo de todos os números menores ou iguais a 1 . Logo, o elemento comum entre $A = [-2, 2)$, $B = (0, +\infty)$ e $C = (-\infty, 1]$ é o intervalo $(0, 1]$.

- e) Graficamente, podemos visualizar que os elementos do conjunto A estão no intervalo de todos os números entre -2 e 2 (excluindo o elemento 2). Os elementos do conjunto B estão no intervalo de todos os números maiores que zero, excluindo o zero. Logo, o elemento comum de todo o conjunto $A = [-2, 2)$ e do conjunto $B = (0, +\infty)$ é o intervalo $[-2, +\infty)$.
- f) Explicação análoga às anteriores, nos levando ao conjunto $(-\infty, 2)$.
- g) Explicação análoga às anteriores, nos levando ao conjunto $\mathbb{R}$.
- h) Unindo-se todos os elementos dos três conjuntos A, B e C, temos o conjunto $\mathbb{R}$.
- i) A diferença entre os conjuntos $A = [-2, 2)$ e $B = (0, +\infty)$ é obtida por todos os elementos de A que não são elementos de B, ou seja, $[-2, 2) - (0, \infty) = [-2, 0]$.
- j) Explicação análoga à anterior, nos levando ao conjunto $(1, 2)$.
- k) Explicação análoga à anterior, nos levando ao conjunto $(1, +\infty)$.
- 3) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Determine se as afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F), justificando sua resposta:
- | | |
|---------------------------------|--|
| a) $a^2 > 0 \Rightarrow a > 0$ | f) $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ |
| b) $a^3 > 0 \Rightarrow a > 0$ | g) $a^7 = b^7 \Rightarrow a = b$ |
| c) $a^7 < 0 \Rightarrow a < 0$ | h) $a^4 = 81b^4 \Rightarrow a = 3b$ ou $a = -3b$ |
| d) $a > 5 \Rightarrow a \geq 5$ | i) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ |
| e) $a \geq 5 \Rightarrow a > 5$ | j) $a^3 + b^3 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ |

Solução:

- a) $F((-5)^2 = 25 > 0)$
- b) V, pois se um número está elevado a um expoente ímpar, o resultado dessa potência mantém seu sinal, ou seja, $2^3 = 8 > 0 \Rightarrow a > 0$ e $(-2)^3 = -8 < 0 \Rightarrow a < 0$.
- c) V, pela mesma explicação do item anterior.

- d) V (se um número é maior que outro, então ele é maior ou igual ao outro).
- e) F ($5 \geq 5$, mas não é maior que ele mesmo).
- f) F ($2^2 = (-2)^2$, mas $2 \neq -2$).
- g) V, pois como a potência ímpar não altera o sinal do número, então $a = b$.
- h) V, pois $a^4 = 81b^4 \Rightarrow a^4 = 3^4 b^4 \Rightarrow a^4 = (3b)^4 \Rightarrow a = \pm \sqrt[4]{(3b)^4} = \pm 3b$.
- i) V, pois como $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$, então $a^2 + b^2 \geq 0$. Para $a^2 + b^2 = 0$ ser verdadeiro, só teremos o caso onde $a = b = 0$.
- j) F ($1^3 + (-1)^3 = 0$, mas $1 \neq 0$ e $(-1) \neq 0$)

2.6.8 Exercícios propostos

1) Usando a notação de desigualdade, escreva as seguintes relações:

- a) x está à direita de 15 na reta real.
- b) y está entre (-3) e 8 na reta real.
- c) z está situado à esquerda de (-5) na reta real.
- d) w é um número positivo, situado à esquerda de 1 na reta real.
- e) r é um número negativo, situado à direita de (-6) na reta real.
- f) a é um número positivo.
- g) b é um número negativo.
- h) a é maior que b .
- i) b é menor que c .
- j) a está compreendido entre b e c , sendo b menor que c .
- k) a é um número não-negativo.
- l) b é um número não-positivo.
- m) c não é menor que a .

2) Usando a notação de intervalo, escreva o subconjunto de $\mathbb{R}$ formado pelos números reais:

- a) maiores que 3.
- b) menores que (-1) .
- c) maiores ou iguais a 2.
- d) menores ou iguais a π .
- e) maiores que 2 e menores ou iguais a 7.

3) Usando a notação de conjuntos, escreva os intervalos:

- a) $[5, 11]$
- b) $(-7, 3]$
- c) $(-8, 0)$
- d) $[2, +\infty)$
- e) $(-\infty, 5)$
- f) $[-2, 3)$
- g) $(-\infty, 9]$

4) Dados os intervalos $A = [\pi, +\infty)$, $B = (-\infty, \sqrt{17})$ e $C = \left(\frac{8}{3}, 4\right]$, determinar:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cap C$
- c) $B \cap C$
- d) $A \cap B \cap C$
- e) $A \cup B$
- f) $A \cup C$
- g) $B \cup C$
- h) $A \cup B \cup C$
- i) $A - B$
- j) $A - C$
- k) $B - C$

2.7 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a) $x > 15$
- b) $-3 < y < 8$
- c) $z < -5$
- d) $0 < w < 1$
- e) $-6 < r < 0$
- f) $a > 0$

- g) $b < 0$
- h) $a > b$
- i) $b < c$
- j) $b < a < c$
- k) $a \geq 0$
- l) $b \leq 0$
- m) $c \geq a$

- 2) a) $(3, +\infty)$
- b) $(-\infty, -1)$
- c) $[2, +\infty)$
- d) $(-\infty, \pi]$
- e) $(2, 7]$

- 3) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 11\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq 3\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 0\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$
- e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
- f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$
- g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$

- 4) a) $[\pi, \sqrt{17})$
- b) $[\pi, 4]$
- c) C
- d) $[\pi, 4]$
- e) $\mathbb{R}$
- f) $\left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$
- g) B
- h) $\mathbb{R}$
- i) $[\sqrt{17}, +\infty)$
- j) $(4, +\infty)$
- k) $\left(-\infty, \frac{8}{3}\right] \cup (4, \sqrt{17})$

Potenciação

Este capítulo possibilita ao aluno o entendimento das operações de potenciação, radiciação, valor absoluto. Permite, também, o manejo com as inequações do 1º grau e com polinômios.

3.1 Definição

Calcular a potência n de um número real a equivale a multiplicar a , por ele mesmo, n vezes. A notação da operação de potenciação é equivalente a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Exemplos:

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

c) $9^1 = 9$

3.2 Propriedades

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplo:

$$3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$$

b) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$

Exemplo:

$$\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}; 2 \neq 0$$

c) $a^0 = 1$ (faça $m = n$ na propriedade anterior)

Exemplo:

$$\frac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = 4^0 = 1; 4 \neq 0$$

d) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplo:

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

e) $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}^{n \text{ vezes}}}$

Exemplo:

$$3^{3^2} = 3^3 \cdot 3^3$$

f) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplo:

$$(5 \cdot 2)^3 = 5^3 \cdot 2^3 = 125 \cdot 8 = 1.000$$

g) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; b \neq 0$

Exemplo:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}; 3 \neq 0$$

h) $b^{-n} = \frac{1}{b^n}; b \neq 0$

Exemplo:

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3}; 2 \neq 0$$

i) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, n > 0$

Exemplo:

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}, 4 > 0$$

j) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, n > 0$

Exemplo:

$$\sqrt[5]{6^8} = 6^{\frac{8}{5}}, 5 > 0$$

Outros exemplos:

Utilizando as propriedades anteriores, verificamos que:

1) $1^{43} = 1$

2) $0^{15} = 0$

3) $(-3)^2 = 9$

4) $-3^2 = -9$

5) $(-3)^3 = -27$

6) $4^3 \cdot 4^8 = 4^{3+8} = 4^{11}$

7) $(4 \cdot 5)^2 = 4^2 \cdot 5^2 = 16 \cdot 25 = 400$

8) $\frac{4^8}{4^3} = 4^{8-3} = 4^5$

9) $\frac{4^3}{4^8} = 4^{3-8} = 4^{-5} = \frac{1}{4^5}$

10) $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6$

11) $4^{2^3} = 4^8$

12) $(-45)^0 = 1$

13) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = (\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$

$$14) \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3^2}{4^2}} = \frac{1}{\frac{9}{16}} = 1 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$$

$$15) \frac{1}{(-7)^{-5}} = (-7)^5 = -7^5$$

3.3 Exercícios resolvidos

1) Resolva as equações:

a) $3^x = 6.561$

b) $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-3} - 2^{x-4} = 50$

Solução:

a) Fatorando-se 6.561, em fatores primos, encontramos que $6.561 = 3^8$ e $3^x = 6.561$. Sabendo-se que duas potências da mesma base são iguais, se, e somente se, os expoentes são iguais, temos que $3^x = 6.561 \Rightarrow 3^x = 3^8 \Rightarrow x = 8$.

b) $2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-3} - 2^{x-4} = 50$.

Colocando-se o termo de menor expoente em evidência (2^{x-4}), temos:

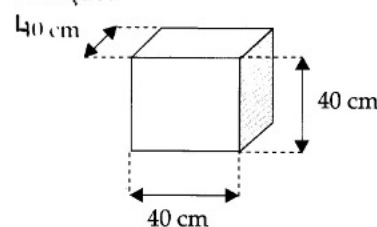
$$2^{x+1} - 2^{x-1} + 2^{x-3} - 2^{x-4} = 50 \Rightarrow 2^{x-4} \cdot (2^5 - 2^3 + 2^1 - 1) = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{x-4} \cdot (32 - 8 + 2 - 1) = 50 \Rightarrow 2^{x-4} \cdot 25 = 50 \Rightarrow 2^{x-4} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 4 = 1 \Rightarrow x = 5$$

2) Uma fábrica de embalagens produz uma embalagem especial, usada na indústria automotiva. Em razão do peso das peças, que são acondicionadas nessas embalagens, o fundo é preparado com uma base metálica, as laterais são feitas de papelão e a tampa é composta por isopor. A matéria-prima utilizada no fundo tem um custo de R\$ 100,00 por m^2 ; a das laterais, R\$ 50,00 por m^2 ; e a da tampa, R\$ 30,00 por m^2 . Sabendo-se que a embalagem deve ser um cubo de 40 cm de lado, calcule o custo da matéria-prima empregada nessa embalagem.

Solução:



$$\text{Custo do Fundo} = 100 \times (0,4)^2 = 16$$

$$\text{Custo das Laterais} = 50 \times [4 \times (0,4)^2] = 32$$

$$\text{Custo da Tampa} = 30 \times (0,4)^2 = 4,8$$

$$\text{Custo Total} = 16 + 32 + 4,80 = 52,80$$

Logo, o custo da matéria-prima utilizada é de R\$ 52,80.

3.4 Exercícios propostos

1) Simplifique as expressões:

a) $\frac{10^{-3} \cdot 10^{-5}}{10^{-4} \cdot 10^{-2}}$

d) $\frac{10^4 \cdot 8^{-2}}{10^{-1} \cdot 2^4}$

b) $\frac{10^4 \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^8}$

e) $\frac{3^{\frac{5}{3}} \cdot 3^{\frac{7}{2}}}{3^{\frac{1}{6}}}$

c) $\frac{8 \cdot 10 \cdot 125 \cdot 1.296}{256 \cdot 25 \cdot 30}$

2) Resolva as equações:

a) $7^x = \frac{1}{2.401}$

d) $3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 1.494$

b) $5^{3x-7} = 25$

e) $(5^x)^x = (25^2)^9$

c) $2^{6x+7} = 128$

f) $2^{3^x} = 512$

3.5 Respostas dos exercícios propostos

1) a) 10^{-2}

b) 10^{-13}

c) $2^{-1} \cdot 3^3 \cdot 5$

d) $(2^{-1} \cdot 5)^5$

e) 3^5

2) a) $x = -4$

b) $x = 2$

c) $x = 0$

d) $x = 5$

e) $x = \pm 6$

f) $x = \frac{1}{2}$

3.6 Valor absoluto ou módulo

3.6.1 Definição

- O valor absoluto ou módulo, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- $|x|$ é sempre nulo ou positivo, isto é, não negativo.

Exemplos:

- $|8| = 8$
- $|-8| = -(-8) = 8$
- $|0| = 0$

3.6.2 Teoremas

- $|x| \geq 0$, ou seja, o valor absoluto de um número é sempre positivo.

Exemplo:

$$|4| = 4 \geq 0 \text{ e } |-4| = 4 \geq 0.$$

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, ou seja, o valor absoluto de um número é nulo se, e somente se, esse número for zero.
- $|x|^2 = x^2$, ou seja, o valor absoluto de um número ao quadrado é igual ao quadrado desse número.

Exemplo:

$$|7|^2 = 7^2 \text{ e } |-7|^2 = (-7)^2$$

- $|-x| = |x|$, ou seja, o valor absoluto de um número é igual ao valor absoluto de seu simétrico.

Exemplo:

$$|-4| = 4 = |4|$$

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, onde $a > 0$.

Se o valor absoluto de um número for menor que a quantidade positiva “a”, então ele está entre “a” e o simétrico de “a” (–a).

Exemplo:

$$|x| < 5 \text{ se, e somente se, } -5 < x < 5.$$

- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$, onde $a > 0$.

Se o valor absoluto de um número for menor ou igual à quantidade positiva “a”, então ele está entre “a” e o simétrico de “a” (–a), incluindo esses valores.

Exemplo:

$$|x| \leq 3 \text{ se, e somente se, } -3 \leq x \leq 3.$$

- $|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$, onde $a > 0$.

Se o valor absoluto de um número for maior que a quantidade positiva “a”, então ele é maior que “a” ou menor que o simétrico de “a” (–a).

Exemplo:

$$|x| > 2 \text{ se, e somente se, } x > 2 \text{ ou } x < -2.$$

- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a$, onde $a > 0$.

Exemplo:

$$|x| \geq 10 \text{ se, e somente se, } x \geq 10 \text{ ou } x \leq -10.$$

- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, ou seja, o valor absoluto do produto de dois números é igual ao produto dos valores absolutos desses números.

Exemplo:

$$|(-3) \cdot 5| = |-15| = 15 \text{ e } |-3| \cdot |5| = 3 \cdot 5 = 15.$$

- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$, ou seja, o valor absoluto do quociente de dois números é igual ao quociente dos valores absolutos desses números.

Exemplo:

$$\left|\frac{2}{5}\right| = \frac{2}{5} = \frac{|2|}{|5|}.$$

$$\bullet -|a| \leq a \leq |a|.$$

Exemplo:

Se $|-5| = 5$, então $-|-5| \leq -5 \leq |-5|$ ($-5 \leq 5 \leq 5$).

$$\bullet |a| = |b| \Leftrightarrow a = \pm b.$$

Exemplo:

$$|3| = |3| \text{ e } |3| = |-3|$$

$$\bullet |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Exemplo:

$$|(-4) + 1| = |-3| = 3 \text{ e } |-4| + |1| = 4 + 1 = 5. \text{ Daí, } 3 \leq 5.$$

3.6.3 Raiz quadrada

Definição:

Considere a um número real, tal que $a \geq 0$. A *raiz quadrada* de a , indicada por $\sqrt{a}$, é um número real b , $b \geq 0$, tal que $b^2 = a$.

Exemplos:

$$1) \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$2) \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Propriedades:

$$1) \sqrt{a^2} = |a|$$

$$2) \text{ Se } a \geq 0, \text{ então } \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$$

$$3) \text{ Se } a, b \geq 0, \text{ então } \sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$$

Observações importantes:

$$1) \text{ Se } x = \sqrt{25}, \text{ então } x = 5.$$

$$2) \text{ Se } x^2 = 25, \text{ então } x = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

$$3) \text{ Se } x^2 \leq a, \text{ então } -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

$$\text{De fato: } x^2 \leq a \Rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{a} \Rightarrow |x| \leq \sqrt{a} \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

3.6.4 Exercícios resolvidos

$$4) \text{ Simplifique a expressão } \frac{|x-1|}{x-1}.$$

Solução:

$$\text{Pela definição de valor absoluto, } |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 1 \\ 1-x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Se $|x-1| = x-1$, a expressão inicial se torna:

$$\frac{x-1}{x-1} = 1, \text{ sendo } x-1 \neq 0 \text{ (para não anular o denominador).}$$

Se $|x-1| = 1-x$, a expressão inicial se torna:

$$\frac{1-x}{x-1} = \frac{-(-1+x)}{x-1} = -\frac{x-1}{x-1} = -1, \text{ com } x-1 \neq 0.$$

Resumindo:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1}; x > 1 \\ \frac{1-x}{x-1}; x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 1; x > 1 \\ -1; x < 1 \end{cases}$$

2) Resolva as equações:

$$a) |5-3x| = 4$$

$$b) |5x+1| = |3x+17|$$

$$c) |x| + |x-3| = 5$$

Solução:

$$a) |5-3x| = 4 \Rightarrow 5-3x = 4 \text{ ou } 5-3x = -4 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 3.$$

$$b) |5x+1| = |3x+17| \Rightarrow 5x+1 = 3x+17 \text{ ou } 5x+1 = -(3x+17) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 8 \text{ ou } x = -\frac{9}{4}$$

$$c) |x| + |x-3| = 5$$

Sabemos que $|x| = \begin{cases} x; x \geq 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$ e $|x-3| = \begin{cases} x-3; x \geq 3 \\ -x+3; x < 3 \end{cases}$

Então:

$$\begin{cases} x < 0 & \Rightarrow |x| + |x-3| = 5 \Rightarrow -x - x + 3 = 5 \Rightarrow x = -1 \\ 0 < x < 3 & \Rightarrow |x| + |x-3| = 5 \Rightarrow x - x + 3 = 5 \Rightarrow 3 = 5 \text{ (absurdo)} \\ x > 3 & \Rightarrow |x| + |x-3| = 5 \Rightarrow x + x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Logo, $S = \{-1, 4\}$.

- 3) Uma fornecedora de rolamentos automotivos nacionais tem como matéria-prima, de um de seus produtos, pequenas esferas de aço inoxidável. O departamento de produção informou ao departamento de compras que o diâmetro das esferas necessárias para a produção é de 50 mm, com uma variação de 5 mm para cima ou para baixo desse valor. Descreva a desigualdade modular que expressa o pedido feito pelo departamento de produção.

Solução:

Uma variação de 5 mm é aceitável em torno do valor correto de 50 mm. Logo, o módulo da diferença entre o diâmetro (d) da esfera recebida e a desejada (50 mm) deve ser no máximo 5 mm, ou seja:

$$|d - 50| \leq 5 \Rightarrow \begin{cases} d - 50 \geq 0 \Rightarrow d - 50 \leq 5 \\ d - 50 < 0 \Rightarrow -5 \leq d - 50 \end{cases} \Rightarrow 45 \leq d \leq 55$$

- 4) A comissão de vendas mensal, de cada vendedor de uma determinada sapataria, é de 10% sobre as vendas do mês. Existe um piso salarial mínimo, garantido por acordo sindical, de R\$ 600,00. Um levantamento feito na contabilidade da empresa mostrou que nunca foi pago, em um único mês, mais de R\$ 2.000,00 para um vendedor. Sabendo-se que um vendedor que não tiver uma comissão mensal será sumariamente despedido, descreva matematicamente quanto deve ser o volume de vendas de cada vendedor que trabalha na empresa.

Solução:

O salário do vendedor é de 10% sobre as vendas se este valor for superior a R\$ 600,00. Logo:

$$600 = \frac{10}{100} \text{ vendas mínimas} \Rightarrow 600 = 0,1 \text{ venda mínima} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Vendas mínimas} = \frac{600}{0,1} = 6.000$$

O maior salário já pago a um vendedor foi de R\$ 2.000,00. Logo:

$$2.000 = \frac{10}{100} \text{ vendas máximas} \Rightarrow 2.000 = 0,1 \text{ venda máxima} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Vendas máximas} = \frac{2.000}{0,1} = 20.000$$

Portanto, as vendas mensais de um empregado da empresa podem ser matematicamente expressas por:

$$6.000 \leq \text{vendas mensais} \leq 20.000$$

3.6.5 Exercícios propostos

1) De acordo com a definição, calcule:

- | | | |
|---------------|---------------------|---------------------------|
| a) $ 4 - 6 $ | d) $ -2 + -7 $ | g) $13 + -9 - -2 - 4 $ |
| b) $ -4 + 6 $ | e) $ -4 - 6 + 6 $ | h) $ - -6 $ |
| c) $ -4 - 6 $ | f) $ -9 + 4 - 2 $ | i) $ -3 - -11 $ |

2) Supondo $\pi = 3,141592$, determine $|3 - \pi|$.

3) Simplifique as expressões:

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{ x-3 }{x-3}$, sendo $x < 3$ | c) $\frac{ x }{x} + \frac{ x-4 }{x-4}$, sendo $0 < x < 4$ |
| b) $1 + \frac{ x-2 }{x-2}$, sendo $x > 2$ | |

4) Resolva as expressões a seguir:

- a) $|x-1|=5$ c) $|x+5|\leq 3$ e) $|2x+3|<3$
 b) $|2x-1|>9$ d) $|3x-1|\geq 5$

5) Determine o conjunto solução das seguintes equações:

- a) $|x-5|=8$ g) $|2x-3|=|4x+5|$
 b) $|5-x|=4$ h) $|5x-4|=|3x+6|$
 c) $|2x-3|=9$ i) $|2x+5|=|x-11|$
 d) $|3x+5|=10$ j) $|x-3|+|x+4|=7$
 e) $\left|\frac{x-2}{3}\right|=5$ k) $|x-3|+|x-4|=1$
 f) $\left|\frac{1-x}{4}\right|=6$ l) $||x-5|-8|=6$

3.7 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a) 2 d) 9 g) 16
 b) 2 e) 16 h) 6
 c) 10 f) 11 i) 8
- 2) 0,141592
- 3) a) -1 b) 2 c) 0
- 4) a) $x=6$ ou $x=-4$ c) $-8\leq x\leq -2$ e) $-3<x<0$
 b) $x>5$ ou $x<-4$ d) $x\geq 2$ ou $x\leq -\frac{4}{3}$

- 5) a) $\{-3, 13\}$ f) $\{-23, 25\}$ i) $\{-16, 2\}$
 b) $\{1, 9\}$ g) $\left\{-4, -\frac{1}{3}\right\}$ j) $[-4, 3]$
 c) $\{-3, 6\}$ h) $\left\{-\frac{1}{4}, 5\right\}$ k) $[3, 4]$
 d) $\left\{-5, \frac{5}{3}\right\}$ l) $\{-9, 3, 7, 19\}$
 e) $\{-13, 17\}$

3.8 Polinômios

3.8.1 Definição

Um polinômio na variável real x é uma expressão composta da soma de produtos de constantes por potências inteiras positivas de x e sempre pode ser escrito na forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, a_i , $i=0,1,\dots,n$ são números reais chamados *coeficientes* e as parcelas $a_i x^i$, $i=0,1,\dots,n$, *termos* do polinômio. Cada termo é denominado *monômio*.

Exemplos:

- a) $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x + 5$ c) $P(x) = -7x + \pi$
 b) $P(x) = 2x^7 + \sqrt{3}x^2 - 2$ d) $P(x) = 0$

Contra-exemplos:

- a) $f(x) = x - 3x^{\frac{1}{2}} + 5$ b) $f(x) = x^{-7} + 2x + 15$

Nos dois casos, temos expoentes que não são números naturais. Logo, essas expressões não representam polinômios.

3.8.2 Valor numérico

Quando é atribuído um valor fixo para x , digamos $x = \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), e calculamos $P(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0$, dizemos que $P(\alpha)$ é o valor numérico do polinômio para $x = \alpha$.

Exemplos:

Determinar o valor numérico do polinômio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ para:

- a) $x=1$

Substituindo o valor 1 no lugar da variável x , temos:

$$P(1) = 1^3 - 4(1)^2 + 6(1) - 4 = 1 - 4 + 6 - 4 = -1$$

b) $x = -\frac{1}{2}$

Do mesmo modo, substituindo o valor $\left(-\frac{1}{2}\right)$ no lugar da variável x , temos:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = -\frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = -\frac{65}{8}$$

c) $x = 0$

$$P(0) = 0^3 - 4(0)^2 + 6(0) - 4 = -4$$

d) $x = 2$

$$P(2) = 2^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$$

Observação: Quando $P(\alpha) = 0$, dizemos que α é raiz do polinômio $P(x)$.

Assim, no exemplo *d* anterior, temos que $x = 2$ é raiz do polinômio dado.

3.8.3 Polinômio nulo

Polinômio nulo ou *polinômio identicamente nulo* é aquele em que todos os seus coeficientes são iguais a zero ($P(x) = 0$).

Exemplo:

Supondo que o polinômio $P(x) = (a-7)x^3 - 4(2-b)x^2 + 6(c+2)x - 4d$ é identicamente nulo, concluímos que:

$$\begin{cases} a-7=0 \Rightarrow a=7 \\ -4(2-b)=0 \Rightarrow b=2 \\ 6(c+2)=0 \Rightarrow c=-2 \\ -4d=0 \Rightarrow d=0 \end{cases}$$

3.8.4 Grau

Dado $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, não identicamente nulo, com $a_n \neq 0$, dizemos que o grau do polinômio corresponde a mais alta potência de x presente nesse polinômio e denotamos por $\text{gr}(P(x)) = n$.

Exemplos:

a) $P(x) = 4x^3 - 2x + 5 \Rightarrow \text{gr}(P(x)) = 3$

b) $P(x) = -2x^8 + 5 \Rightarrow \text{gr}(P(x)) = 8$

c) $P(x) = -7x + 15 \Rightarrow \text{gr}(P(x)) = 1$

d) $P(x) = 5 \Rightarrow \text{gr}(P(x)) = 0$

3.8.5 Igualdade

Dois polinômios $P(x)$ e $Q(x)$ são iguais ou *idênticos*, $P(x) = Q(x)$, quando todos os seus coeficientes são ordenadamente iguais.

Exemplo:

$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ e $Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1$ serão iguais ou idênticos se, e somente se, $a = 0$, $b = 3$, $c = -7$, $d = 0$, $e = 2$ e $f = 1$.

3.8.6 Operações

Sejam $P(x)$ e $Q(x)$, tais que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ e $k \in \mathbb{R}$.

3.8.6.1 Adição de polinômios

$$P(x) + Q(x) = (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

Observação: $P(x) + Q(x) = (P + Q)(x)$

Exemplo:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7 \text{ e } Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1.$$

Somando-se os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (0+3)x^4 + (3-7)x^3 + (-2+0)x^2 + (0+2)x + (7+1) = \\ &= 3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x + 8 \end{aligned}$$

3.8.6.2 Diferença de polinômios

$$P(x) - Q(x) = (a_n - b_n)x^n + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

Observação: $P(x) - Q(x) = (P - Q)(x)$

Exemplo:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7 \text{ e } Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1.$$

Subtraindo-se os coeficientes dos termos de mesmo grau, obtemos:

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (0-3)x^4 + (3+7)x^3 + (-2-0)x^2 + (0-2)x + (7-1) = \\ &= -3x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

3.8.6.3 Multiplicação por um número real (ou escalar)

$$k \cdot P(x) = (k \cdot a_n)x^n + (k \cdot a_{n-1})x^{n-1} + \dots + (k \cdot a_1)x + (k \cdot a_0)$$

Observação: $k \cdot P(x) = (k \cdot P)(x)$

Exemplo:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7 \text{ e } k = -4.$$

Multiplicando-se os coeficientes dos termos do polinômio pela constante (-4) , obtemos:

$$k \cdot P(x) = (-4) \cdot 3x^3 + (-4) \cdot (-2)x^2 + (-4) \cdot 7 = -12x^3 + 8x^2 - 28$$

3.8.6.4 Multiplicação de polinômios

Pode ser feita pela propriedade distributiva pela multiplicação ou por um dispositivo prático (uma espécie de conta).

Observação: $P(x) \cdot Q(x) = (P \cdot Q)(x)$

Exemplo:

$$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7 \text{ e } Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x + 1.$$

1) Propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3x^3 - 2x^2 + 7) \cdot (3x^4 - 7x^3 + 2x + 1) = \\ &= 3x^3 \cdot (3x^4 - 7x^3 + 2x + 1) + \\ &\quad - 2x^2 \cdot (3x^4 - 7x^3 + 2x + 1) + \\ &\quad + 7 \cdot (3x^4 - 7x^3 + 2x + 1) = \\ &= (9x^7 - 21x^6 + 6x^4 + 3x^3) + \\ &\quad + (-6x^6 + 14x^5 - 4x^3 - 2x^2) + \\ &\quad + (21x^4 - 49x^3 + 14x + 7) = \\ &= 9x^7 - 27x^6 + 14x^5 + 27x^4 - 50x^3 - 2x^2 + 14x + 7 \end{aligned}$$

2) Dispositivo prático:

$3x^4$	$-7x^3$	$+2x$	$+1$					$\leftarrow$	$Q(x)$
$3x^3$	$-2x^2$	$+7$						$\leftarrow$	$P(x)$
$9x^7$	$-21x^6$		$+6x^4$	$+3x^3$				$\leftarrow$	$3x^3 \cdot Q$
	$-6x^6$	$+14x^5$		$-4x^3$	$-2x^2$			$\leftarrow$	$-2x^2 \cdot Q$
			$21x^4$	$-49x^3$		$-14x$	$+7$	$\leftarrow$	$7 \cdot Q$
$9x^7$	$-27x^6$	$+14x^5$	$+27x^4$	$-50x^3$	$-2x^2$	$-14x$	$+7$	$\leftarrow$	$P \cdot Q$

3.8.6.5 Divisão de polinômios

A divisão de $D(x)$ (dividendo) por $d(x)$ (divisor), não nulo, significa determinar polinômios $q(x)$ (quociente) e $r(x)$ (resto), tais que:

$$a) D(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x).$$

$$b) \text{gr}(r(x)) < \text{gr}(d(x)) \text{ ou } r(x) = 0.$$

Observação: Se $r(x)=0$, dizemos que $D(x)$ é *divisível* por $d(x)$ ou que a divisão é *exata*.

A divisão pode ser feita por meio de algoritmo simples, que simula a divisão de números inteiros (método da chave):

- divide-se o termo de mais alto grau do dividendo pelo termo de maior grau do divisor;
- multiplica-se o quociente pelo divisor e subtrai-se este resultado do dividendo;
- repete-se o processo até se obter um polinômio de grau menor que o divisor. Este último polinômio será o resto da divisão.

No caso do divisor ser um polinômio de grau 1, também podemos utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini (veremos no exemplo).

Observação: $\frac{D(x)}{d(x)} = \left(\frac{D}{d}\right)(x)$

Exemplos:

1) $D(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ e $d(x) = x^2 - 2x + 3$.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 D \rightarrow & 3x^5 & -6x^4 & +13x^3 & -9x^2 & +11x & -1 & & x^2 & -2x & +3 & \leftarrow & d \\
 & & -3x^5 & +6x^4 & -9x^3 & & & & 3x^3 & +4x & -1 & \leftarrow & q \\
 \hline
 & & & 4x^3 & -9x^2 & +11x & -1 & & & & & & \\
 & & & -4x^3 & +8x^2 & -12x & & & & & & & \\
 \hline
 & & & & -x^2 & -x & -1 & & & & & & \\
 & & & & & x^2 & -2x & +3 & & & & & \\
 \hline
 r \rightarrow & & & & & & -3x & +2 & & & & &
 \end{array}$$

- $(3x^5) \cdot (x^2) = 3x^3$
- $(3x^3) \cdot (x^2 - 2x + 3) = 3x^5 - 6x^4 + 9x^3$
- $(3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1) - (3x^5 - 6x^4 + 9x^3) = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$
- Recomeça-se o processo. Visualize-o na chave anterior. Assim:

$$3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = (x^2 - 2x + 3) \cdot (3x^3 + 4x - 1) + (-3x + 2)$$

2) $D(x) = x^4 - 3x^2 + 5x + 1$ e $d(x) = x - 2$

a) Método da chave:

x^4	$+0x^3$	$-3x^2$	$+5x$	$+1$	x	-2				
$-x^4$	$+2x^3$				x^3	$+2x^2$	$+x$	$+7$		
	$2x^3$	$-3x^2$	$+5x$	$+1$						
	$-2x^3$	$+4x^2$								
		x^2	$+5x$	$+1$						
		$-x^2$	$+2x$							
			$7x$	$+1$						
			$-7x$	$+14$						
				15						

$$x^4 - 3x^2 + 5x + 1 = (x - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 7) + 15$$

b) Briot-Ruffini:

$$d(x) = x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ (raiz do divisor)}$$

	coeficientes de D(x)
d(x) = 0	

	1	0	-3	5	1
2					

O dispositivo é o seguinte:

- Repete-se o 1º número para a linha de baixo (no caso 1).
- Multiplica-se a raiz por ele e soma-se ao próximo ($2 \cdot 1 + 0 = 2$).
- Coloca-se esse resultado abaixo do zero.
- Multiplica-se a raiz por esse número e soma-se ao próximo ($2 \cdot 2 + (-3) = 1$).
- Coloca-se esse resultado abaixo do (-3) .

E assim sucessivamente, até terminarem os coeficientes de $D(x)$.

A tabela, então, fica assim:

O resultado da divisão se encontra no meio da tabela e o número separado (15) é o resto, isto é, $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = (x - 2) \cdot (x^3 + 2x^2 + x + 7) + 15$.

3.8.7 Produtos notáveis e fatoração

3.8.7.1 Produtos notáveis

Os produtos notáveis são multiplicações entre polinômios, muito conhecidas em virtude de seu uso extenso.

Igualdade	Exemplo
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$
$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$	$x^2 - 5 = (x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5})$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$
$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$
$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$	$8x^3 - 27 = (2x - 3) \cdot (4x^2 + 6x + 9)$
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	$(x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$
$(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$	$(x - 5) \cdot (x - 2) = x^2 - 7x + 10$
$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$	$(x + 5) \cdot (x + 2) = x^2 + 7x + 10$
$(x + a) \cdot (x - b) = x^2 + (a - b)x - ab$	$(x + 5) \cdot (x - 2) = x^2 + 3x - 10$ $(x + 2) \cdot (x - 5) = x^2 - 3x - 10$

3.8.7.2 Completar quadrados

O processo de completar quadrados tem base nas duas primeiras fórmulas de produtos notáveis, ou seja, $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$, fazendo-se uma comparação direta entre os termos. É uma operação muito utilizada em polinômios de grau 2.

Exemplos:

Completar os quadrados:

a) $x^2 + 6x$

Podemos comparar essa expressão com $(a + b)^2$, pois o coeficiente do termo de grau 1 é positivo. Assim:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x^2 + 6x$$

Comparando, diretamente, temos que $a = x$ e que $2ab = 6x$. Daí, $2b = 6 \Rightarrow b = 3$. Logo, $b^2 = 9$.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Assim:

$$x^2 + 6x = x^2 + 6x + 0 = x^2 + 6x + (9 - 9) = (x^2 + 6x + 9) - 9 = (x + 3)^2 - 9$$

b) $x^2 - x + 2 = (x^2 - x) + 2$

Para analisar esse exemplo, vamos, inicialmente, desconsiderar a constante. Podemos comparar essa expressão com $(a - b)^2$, pois o coeficiente do termo de grau 1 é negativo. Assim:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x^2 - x$$

Comparando, diretamente, temos que $a = x$ e que $2ab = x$. Daí, $2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Logo, $b^2 = \frac{1}{4}$.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Assim:

$$x^2 - x + 2 = (x^2 - x) + 2 = (x^2 - x) + 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

3.8.7.3 Fatoração

Fatorar polinômio significa reescrevê-lo como produto de outros polinômios.

Exemplos:

- 1) $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x+1)(x-1)$
- 2) $x^4 - 5x^2 = x^2(x^2 - 5) = x^2(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$
- 3) $x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 + 1)(x+1)(x-1)$
- 4) $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 + 2x + 4)$
- 5) $x^6 - 27 = (x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^4 + 3x^2 + 9)$

3.8.8 Equações polinomiais

Uma equação é uma igualdade na qual figura uma incógnita.

Uma equação polinomial é uma igualdade de polinômios e pode ser escrita na forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Chama-se *raiz* da equação todo número que, substituído no lugar de x , torna a sentença verdadeira, isto é, se $P(\alpha) = 0$, então α é raiz da equação e $P(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

Chama-se *conjunto solução* o conjunto de todas as raízes da equação.

Resolver uma equação polinomial é determinar o seu conjunto solução.

3.8.8.1 Leis de cancelamento

São propriedades importantes para auxiliar na simplificação e resolução de equações polinomiais.

Adição	$a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$
Multiplicação	$a \neq 0 \Rightarrow (a \times b = a \times c \Leftrightarrow b = c)$

Exemplos:

- 1) $4x + 7 = a + 7 \Leftrightarrow 4x = a$
- 2) $3a = 3b \Leftrightarrow a = b$

Observação: Tome cuidado ao fazer o cancelamento na multiplicação, para não simplificar por zero:

Exemplo:

$$4x = 2x \Leftrightarrow 4 = 2, \text{ o que é absurdo!}$$

A forma correta seria: $4x = 2x \Leftrightarrow 4x - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Uma consequência muito importante da lei do cancelamento na multiplicação é:

$$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Exemplos:

- 1) $3(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 5$ já que $3 \neq 0$.
- 2) $x(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x+3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$
- 3) $(x+1)(x-2)(2x+6) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = -3$
- 4) $5(|x|-1)(|x|+1) = 0 \Leftrightarrow |x|-1 = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

(obs: $|x| + 1 \geq 1$)

3.8.8.2 Equação do 1º grau

É uma equação da forma $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Nesse caso, a solução é extremamente simples. Como $a \neq 0$:

$$(ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}) \Rightarrow S = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$$

Exemplos:

$$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \quad \therefore S = \{5\}$$

$$3x + 18 = 0 \Leftrightarrow 3x = -18 \Leftrightarrow x = -6 \quad \therefore S = \{-6\}$$

$$5x + 6 = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x = -11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3} \quad \therefore S = \left\{ -\frac{11}{3} \right\}$$

8.8.3 Equação do 2º grau

uma equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

As soluções dessa equação são as suas raízes.

Observando o Exercício 5 dos Exercícios Resolvidos, temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Logo, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Observações:

) $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado *discriminante* da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

) Se $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, então a equação tem duas soluções reais.

3) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, então a equação não tem solução real (tem duas soluções complexas conjugadas).

4) Se $\Delta > 0$, então x_1 e x_2 são as duas soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

5) Se $\Delta = 0$, então $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ são as duas soluções (iguais) da equação $ax^2 + bx + c = 0$ e podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 = 0$$

3.8.9 Exercícios resolvidos

1) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 + rx - 3$, sabendo-se que $x = -2$ é raiz.

Determine a equação deste polinômio.

Solução:

Substituindo o valor (-2) no lugar da variável x e sabendo-se que a raiz do polinômio anula o mesmo polinômio, tem-se:

$$P(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 + 4(-2)^2 + r(-2) - 3 = 0 \Rightarrow 5 - 2r = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 + 4x^2 + \frac{5}{2}x - 3$$

2) Dado o polinômio $P(x) = (m^2 - 1) \cdot x^2 + (m - 1) \cdot x + 7$, discuta, em função de m , o seu grau.

Solução:

a) Para o grau ser 2, devemos ter $m^2 - 1 \neq 0$.

$$m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m^2 \neq 1 \Rightarrow \boxed{m \neq \pm 1}$$

b) Para o grau ser 1, devemos ter $m^2 - 1 = 0$ e $m - 1 \neq 0$.

$$m^2 - 1 = 0 \text{ e } m - 1 \neq 0 \Rightarrow m = \pm 1 \text{ e } m \neq 1 \Rightarrow \boxed{m = -1}$$

Para o grau ser 0, devemos ter $m^2 - 1 = 0$ e $m - 1 = 0$.

$$m^2 - 1 = 0 \text{ e } m - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1 \text{ e } m = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

Dados os polinômios $P(x) = 10x^4 - 3x^2 + 3x + 10$ e $Q(x) = 2x^2 - 5x$, determine o que se pede:

$$\begin{array}{ll} (P+Q)(x) & \text{d) } (P \cdot Q)(x) \\ (P-Q)(x) & \text{e) } \frac{P(x)}{2x+6} \\ (-5) \cdot P(x) & \end{array}$$

Solução:

$$(10x^4 - 3x^2 + 3x + 10) + (2x^2 - 5x) = 10x^4 - x^2 - 2x + 10$$

$$(10x^4 - 3x^2 + 3x + 10) - (2x^2 - 5x) = 10x^4 - 5x^2 + 8x + 10$$

$$(-5) \cdot (10x^4 - 3x^2 + 3x + 10) = -50x^4 + 15x^2 - 15x - 50$$

$$(10x^4 - 3x^2 + 3x + 10) \cdot (2x^2 - 5x)$$

$10x^4$	$-3x^2$	$+3x$	$+10$	
$2x^2$	$-5x$			
$20x^6$		$-6x^4$	$+6x^3$	$+20x^2$
	$-50x^5$		$+15x^3$	$-15x^2$
			$-50x$	
$20x^6$	$-50x^5$	$-6x^4$	$+21x^3$	$+5x^2$
			$-50x$	

$$\frac{P(x)}{2x+6} = \frac{10x^4 - 3x^2 + 3x + 10}{2x+6}$$

$10x^4$	$+0x^3$	$-3x^2$	$+3x$	$+10$	$2x$	$+6$
$-10x^4$	$-30x^3$				$5x^3$	$-15x^2$
					$\frac{+87}{2}x$	-129
	$-30x^3$	$-3x^2$	$+3x$	$+10$		
	$30x^3$	$90x^2$				
		$87x^2$	$+3x$	$+10$		
		$-87x^2$	$-261x$			
			$-258x$	$+10$		
			$258x$	$+774$		
				784		

4) Calcule $\frac{8x^4 - 5x^3 + 3x + 9}{x+6}$, usando Briot-Ruffini:

Solução:

$$x+6=0 \Rightarrow x=-6$$

	8	-5	0	3	9
-6	8	-53	318	-1.905	11.439

5) Complete o quadrado da expressão $ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$.

Solução:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

Comparando com $(u+v)^2$, temos que $u=x$ e que $2uv = \frac{b}{a}x$, ou seja,

$v = \frac{b}{2a}$. Assim, $v^2 = \frac{b^2}{4a^2}$ e a expressão se transforma em:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

6) Uma empresa produtora de maçãs vende suas frutas para o mercado atacadista. O preço de venda é variável de acordo com a quantidade de caixas que o atacadista compra. O preço para uma caixa de 200 kg é de R\$ 1.500,00. Um desconto de R\$ 1,00 é dado para cada caixa adicional, isto é, se o atacadista compra duas caixas, pagará por caixa R\$ 1.499,00. O custo de produção por caixa é de R\$ 200,00. Um custo de entrega de R\$ 25,00 por caixa é pago à transportadora. Um desconto de R\$ 0,01 é dado para cada caixa adicional entregue a um mesmo cliente. Qual é a quantidade comprada por cliente, que proporciona maior lucro para a empresa?

lução:

lucro da empresa é dado pela diferença entre receita e custos.

A receita é obtida pela multiplicação do preço pela quantidade. Nesse caso, o preço é uma função da quantidade pedida pelo cliente.

Receita = preço unitário $\times$ quantidade de caixas

Preço unitário = $1.500 - 1 \times (q - 1)$

Receita = $[1.500 - q + 1] \times q = 1.501q - q^2$

custo é o somatório do custo de produção com o custo de entrega.

Custo produção = $200 \times q$

Custo de entrega = $[25 - 0,01 \times (q - 1)] \times q = 25,01q - 0,01q^2$

Custo = $225,01q - 0,01q^2$

Logo, o lucro é dado por:

Lucro = $1.501q - q^2 - 225,01q + 0,01q^2$

Lucro = $1.275,99q - 0,99q^2$

Determinando as raízes da função lucro:

Lucro(q) = $1.275,99q - 0,99q^2$

$0 = 1.275,99q - 0,99q^2$

$0 = q \times (1.275,99 - 0,99q)$

isto é, $q = 0$

ou

$(1.275,99 - 0,99q) = 0 \Rightarrow q = \frac{1.275,99}{0,99} = 1.288,8788$

lucro máximo é dado no ponto médio entre as raízes.

Logo, a quantidade máxima seria em 644,4394.

lucro será máximo em R\$ 411.149,11.

3.8.10 Exercícios propostos

1) Determine quais expressões são polinômios:

a) $3x^6 + 2x^4 - 4x + 7^{-2}$

d) $(a+3)x^4 - (a^2-3)x^3 - \sqrt{3}$

b) $x^{\frac{2}{5}} - 5x + 3$

e) $3x^{-3} + 2x^{-2} - 7x^{-1} - 5$

c) $(4x^2 - 1)^{15}$

f) π

2) Determine o valor de r no polinômio $P(x) = x^3 - rx^2 + 2$, sabendo-se que $x=1$ é a raiz desse polinômio.

Determine a equação do polinômio.

3) Seja o polinômio $P(x) = x^4 - 3x^2 - 5$. Calcule $P(-1) - \frac{1}{7}P(3)$.

4) Determine m e n no polinômio $P(x) = mx^3 - 2x^2 + nx - 1$, sabendo-se que 1 é a raiz do polinômio e que $P(-2) = -21$.

5) Determinar o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, sabendo-se que $P(0) = 5$, $P(1) = 6$ e $P(-2) = -9$.

6) Determine a , b e c , de modo que $(a+b-1)x^2 + (b-2c)x + (2c-1) = 0$.

7) Dado o polinômio $P(x) = (2a+b-3)x^2 - (a+2b+8)x + 2$, determine a e b , de modo que $P(x)$ tenha grau 1.

8) Determine a , b e c de modo que os polinômios $P(x) = 15x + 3$ e $Q(x) = (a-b)x^2 + (3a+2b)x + (2a-c)$ sejam iguais.

9) Determine a e b de modo que $\begin{vmatrix} x & a \\ 3x-2 & x-b \end{vmatrix} = x^2 - 4$.

10) Determine quais afirmações são verdadeiras:

a) A soma de dois polinômios de grau 5 é sempre um polinômio de grau 5.

b) O produto de dois polinômios de graus 5 e 8, respectivamente, é um polinômio de grau 13.

c) A diferença de dois polinômios de grau 9 pode ser um polinômio de grau 5.

1) Dados os polinômios $P(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 3x + 4$ e $Q(x) = 4x^2 - 5$, determine:

- a) $(P+Q)(x)$ d) $(P \cdot Q)(x)$
 b) $(P-Q)(x)$ e) $\frac{P(x)}{x+2}$
 c) $\frac{(-2) \cdot P(x)}{Q(x)}$

2) Seja o polinômio $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$. Determine os seguintes polinômios:

- a) $P(x+1)$ c) $P(x^2 - 2x)$
 b) $P(1-x)$

3) Completar os quadrados:

- a) $x^2 - 4x$ d) $x - 9x^2$
 b) $x^2 + 2x + 7$ e) $x^4 - 2x^2 + 2$
 c) $3 + 8x - x^2$ f) $x^4 - 3x^2 + 1$

4) Fatorar os seguintes polinômios:

- a) $y = 6x + x^2$ d) $y = x^7 - 1$
 b) $y = x^2 - 25$ e) $y = x^6 + 2x^4 + x^2$
 c) $y = 16x^4 - a^4$ f) $y = x^5 - 6x^3 + 9x$

5) Utilizando a resolução do exercício anterior, determine onde cada polinômio se anula ($P(x) = 0$).

6) Resolva as equações do 1º grau:

- a) $2 - x = 0$ c) $5 - 7x = 0$
 b) $3x + 8 = 0$ d) $3x - 7 = 9 - 5x$

7) Encontre as raízes reais das equações a seguir:

- a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $2x^2 - 2x + 3 = 0$
 b) $-x^2 - 4x + 60 = 0$ d) $x^2 - 2x - 2 = 0$

3.9 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a, c, d, f
 2) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
 3) -14
 4) $m = 1$ e $n = 2$
 5) $P(x) = -2x^2 + 3x + 5$
 6) $a = -1$, $b = 2$ e $c = \frac{1}{2}$
 7) $a = 5$ e $b = -7$
 8) $a = b = c = 3$
 9) $a = -2$ e $b = 6$
 10) b, c
 11) a) $(P+Q)(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
 b) $(P-Q)(x) = 8x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 3x + 9$
 c) $\frac{(-2) \cdot P(x)}{Q(x)} = -4x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{17}{2}x + \frac{25}{8}$ resto: $r(x) = -\frac{73}{2}x + \frac{61}{8}$
 d) $(P \cdot Q)(x) = 32x^7 - 20x^6 - 12x^5 + 25x^4 - 47x^3 + 16x^2 + 15x - 20$
 e) $\frac{P(x)}{x+2} = 8x^4 - 21x^3 + 49x^2 - 98x + 193$ resto: $r(x) = -382$
 12) a) $P(x+1) = 2x^2 + x + 4$
 b) $P(1-x) = 2x^2 - x$
 c) $P(x^2 - 2x) = 2x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 6x + 5$
 13) a) $(x-2)^2 - 4$ c) $19 - (x-4)^2$
 b) $(x+1)^2 + 6$ d) $\frac{1}{36} - 9\left(x - \frac{1}{18}\right)^2$

$$c) (x^2 - 1)^2 + 1$$

$$f) \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$4) a) x(x+6)$$

$$b) (x+5)(x-5)$$

$$c) (4x^2 + a^2)(2x+a)(2x-a)$$

$$d) (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$e) x^2(x^2 + 1)^2$$

$$f) x(x + \sqrt{3})^2(x - \sqrt{3})^2$$

$$5) a) x=0 \text{ ou } x=-6$$

$$d) x=1$$

$$b) x=-5 \text{ ou } x=5$$

$$e) x=0$$

$$c) x = -\frac{a}{2} \text{ ou } x = \frac{a}{2}$$

$$f) x=0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

$$i) a) S = \{2\}$$

$$c) S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$$

$$b) S = \left\{-\frac{8}{3}\right\}$$

$$d) S = \{2\}$$

$$j) a) S = \{1\}$$

$$c) S = \{ \}$$

$$b) S = \{-10, 6\}$$

$$d) S = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$$

Este capítulo possibilita ao aluno o entendimento e o manuseio das relações e funções. Observemos que o cálculo pode, de maneira simplificada, ser definido como um estudo de funções. Logo, este e alguns dos próximos capítulos são de extrema importância para um estudo de pré-cálculo.

4.1 Par ordenado

Par é todo conjunto formado por dois elementos, isto é, $\{3, 4\}$, $\{-7, \pi\}$ e $\{u, v\}$ são pares. Se lembrarmos do conceito de igualdade de conjuntos, verificaremos que inverter a ordem dos elementos de um par não produz um novo par, ou seja:

$$\{3, 4\} = \{4, 3\}; \{-7, \pi\} = \{\pi, -7\}; \{u, v\} = \{v, u\}.$$

Existem situações em que a ordem dos elementos do par se faz necessária como, por exemplo, na solução de um sistema de equações. Se tivermos o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$$

verificamos, por meio de um cálculo simples, que $x = -1$ e $y = 2$ é a solução, ao passo que $x = 2$ e $y = -1$ não é a solução.

Sendo assim, não podemos representar a solução desse sistema na forma de conjunto, pois teríamos $\{-1, 2\} = \{2, -1\}$, o que seria uma contradição, porque o primeiro conjunto seria a solução do sistema e o segundo, não.

Por causa disso, dizemos que a solução é o par ordenado (como o nome já diz, são dois elementos onde a ordem faz a diferença) $(-1, 2)$, onde o primeiro elemento refere-se à primeira variável e o segundo elemento corresponde à segunda.

propriedade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

Exemplos:

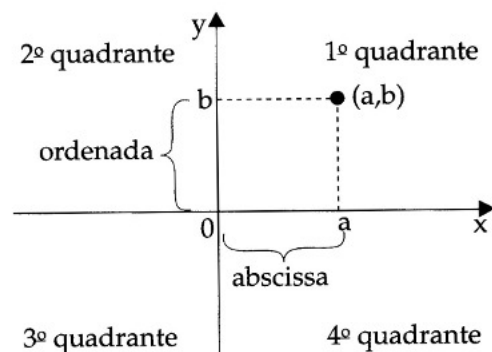
Determinar a e b :

$$(a, b) = (1, 3) \Leftrightarrow a = 1 \text{ e } b = 3$$

$$(a + 2, 18) = (0, 3b) \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2 \\ 3b = 18 \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

2 Sistema cartesiano ortogonal

um sistema formado por dois eixos, x e y , perpendiculares entre si.



O eixo x é denominado eixo das *abscissas* e o eixo y é o eixo das *ordenadas*. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*. Esse sistema é utilizado para localizar um ponto no plano. Assim, o ponto (a, b) , indicado na figura, tem abscissa a e ordenada b .

Um ponto no 1º quadrante tem abscissa e ordenada positivas; um ponto no 2º quadrante possui abscissa negativa e ordenada positiva; um ponto no

3º quadrante contém abscissa negativa e ordenada negativa; e um ponto no 4º quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa.

Exemplo:

Localizar, no plano cartesiano, os pontos $A(3, 0)$, $B(0, -2)$, $C(2, 2)$,

$$D(-2, -3), E(1, -1), F(-3, 4), G\left(-\frac{3}{2}, 2\right), H\left(2, -\frac{3}{2}\right).$$

Solução:

O ponto $A(3, 0)$ tem abscissa positiva e ordenada nula. Logo, ele se localiza na parte positiva do eixo x .

O ponto $B(0, -2)$ tem abscissa nula e ordenada negativa. Logo, ele se localiza na parte negativa do eixo y .

O ponto $C(2, 2)$ tem abscissa positiva e ordenada também positiva. Logo, ele se localiza no 1º quadrante.

O ponto $D(-2, -3)$ tem abscissa negativa e ordenada também negativa. Logo, ele se localiza no 3º quadrante.

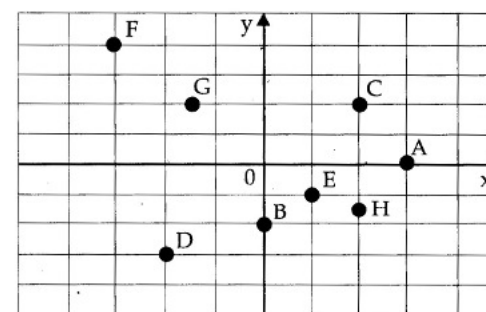
O ponto $E(1, -1)$ tem abscissa positiva e ordenada negativa. Logo, ele se localiza no 4º quadrante.

O ponto $F(-3, 4)$ tem abscissa negativa e ordenada positiva. Logo, ele se localiza no 2º quadrante.

O ponto $G\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ tem abscissa negativa e ordenada positiva. Logo, ele se localiza no 2º quadrante.

O ponto $H\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ tem abscissa positiva e ordenada negativa. Logo, ele se localiza no 4º quadrante.

A figura a seguir ilustra os pontos no eixo cartesiano.



4.3 Produto cartesiano

Definição: Dados dois conjuntos não-vazios A e B , denomina-se *produto cartesiano* de A por B o conjunto $A \times B$ (lê-se “ A cartesiano B ” ou “produto cartesiano de A por B ”), cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y) , onde o primeiro elemento pertence a A e o segundo, a B .

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Observação: Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, então $A \times B = \emptyset$.

Exemplos:

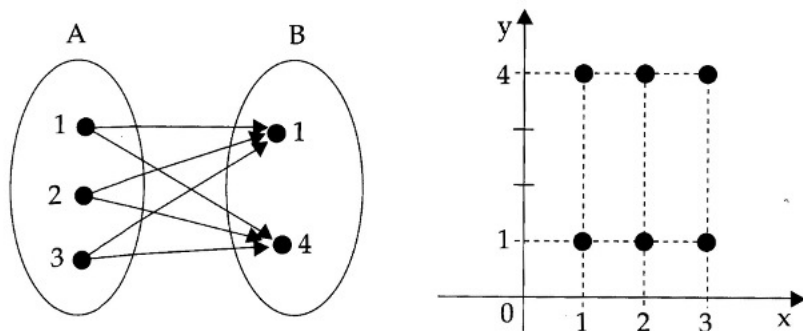
1) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 4\}$.

a) $A \times B$.

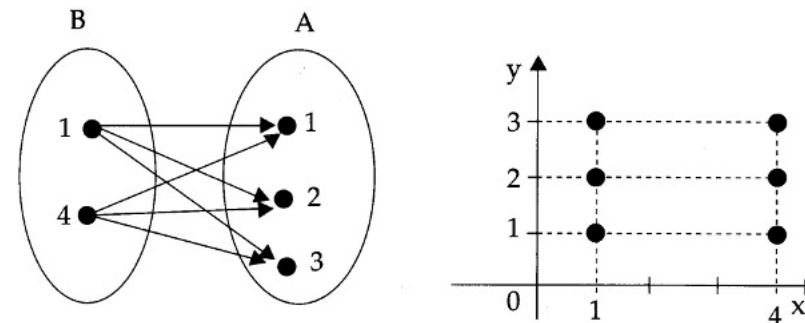
Tomando-se o primeiro elemento do par, o elemento do conjunto A , e o segundo do par, o elemento do conjunto B , todas as combinações possíveis são:

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

Isso pode ser visualizado no diagrama de Venn e no gráfico ilustrado a seguir.

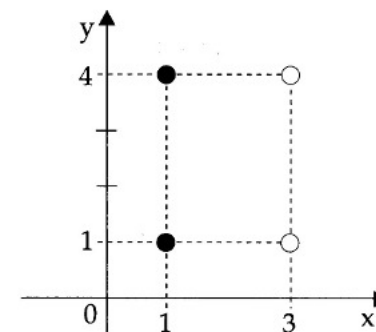


b) $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$



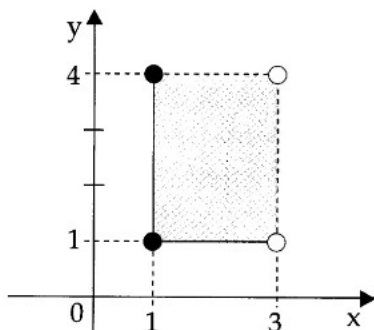
2) $A = [1, 3]$ e $B = \{1, 4\}$.

Só podemos representar $A \times B$ graficamente, pois tem-se um intervalo de números reais (existindo um número infinito de valores possíveis a serem representados).



3) $A = [1, 3]$ e $B = [1, 4]$.

Da mesma forma que o exemplo anterior, só podemos representar $A \times B$ graficamente:

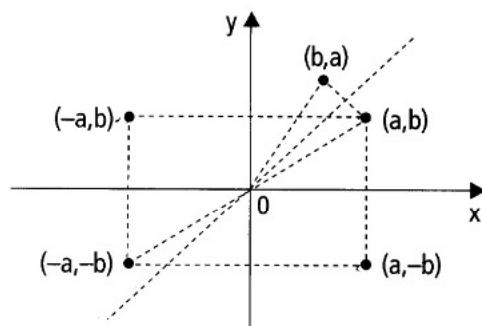
**Observações:**

- 1) $A \times A = A^2$.
- 2) O produto cartesiano não é comutativo, isto é, se $A \neq B$, então $A \times B \neq B \times A$.
- 3) Se $\#A = n$ e $\#B = m$, então $\#(A \times B) = n \cdot m$.

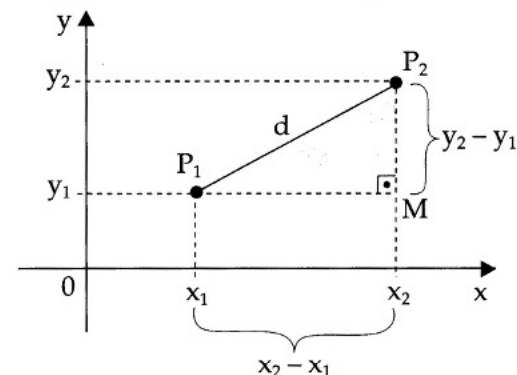
4.4 Simetria de pontos

Considere o ponto $P(a,b)$ no 1º quadrante. Temos que, o simétrico a P com relação:

- 1) ao eixo x , é $(a, -b)$;
- 2) ao eixo y , é $(-a, b)$;
- 3) à origem, é $(-a, -b)$;
- 4) à reta bissetriz do 1º e 3º quadrantes, é (b, a) .

**4.5 Distância entre dois pontos**

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos do plano. Vamos determinar a distância entre P_1 e P_2 , indicada por $d(P_1, P_2)$, utilizando a figura a seguir:



Inicialmente, observemos que:

- a) $d(P_1, M) = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$
- b) $d(M, P_2) = |y_2 - y_1| = \sqrt{(y_2 - y_1)^2}$

Daí, e usando o Teorema de Pitágoras no triângulo P_1MP_2 , temos:

$$d^2 = d^2(P_1, P_2) = d^2(P_1, M) + d^2(M, P_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Logo,

$$d(P_1, P_2) = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Observações:

- 1) A distância de um ponto $P(x, y)$, à origem do sistema, é $d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 2) Os pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ são denominados *projeções ortogonais* dos pontos P_1 e P_2 sobre o eixo x ; $(0, y_1)$ e $(0, y_2)$ são chamados *projeções ortogonais* dos pontos P_1 e P_2 sobre o eixo y .

- 3) As coordenadas do *ponto médio* são dadas pela média aritmética das coordenadas dos pontos extremos do segmento de reta, ou seja,

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ e } y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

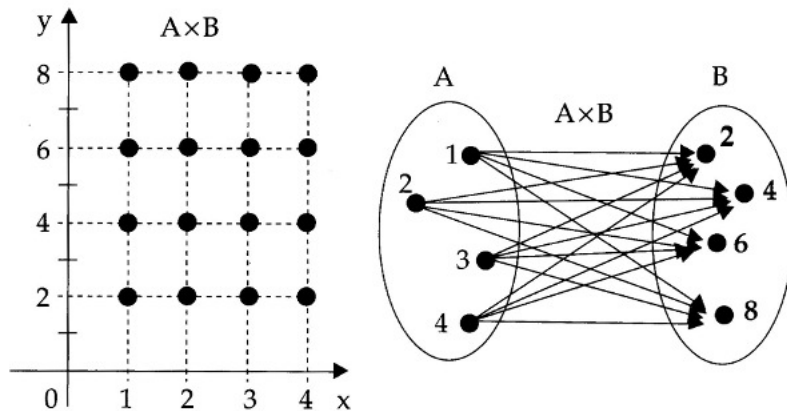
4.6 Relação binária

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

O produto cartesiano desses conjuntos é:

$$A \times B = \{(1,2), (1,4), (1,6), (1,8), (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,2), (3,4), (3,6), (3,8), (4,2), (4,4), (4,6), (4,8)\}.$$

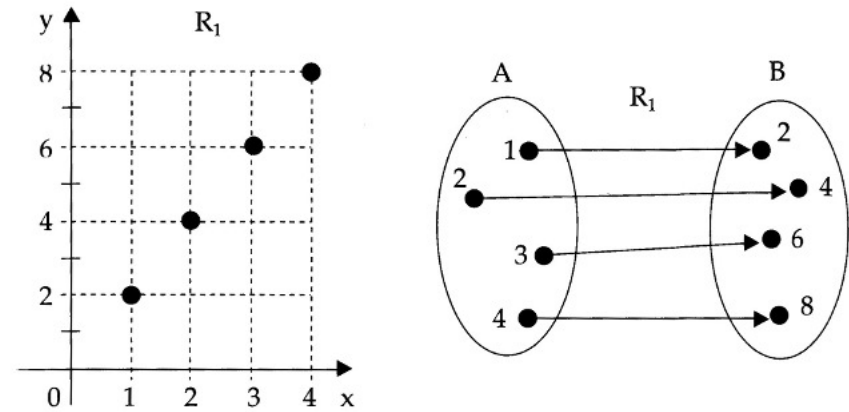
Esse produto pode ser representado pelo diagrama de Venn e, graficamente, como a seguir:



Vamos considerar, agora, alguns subconjuntos desse produto cartesiano:

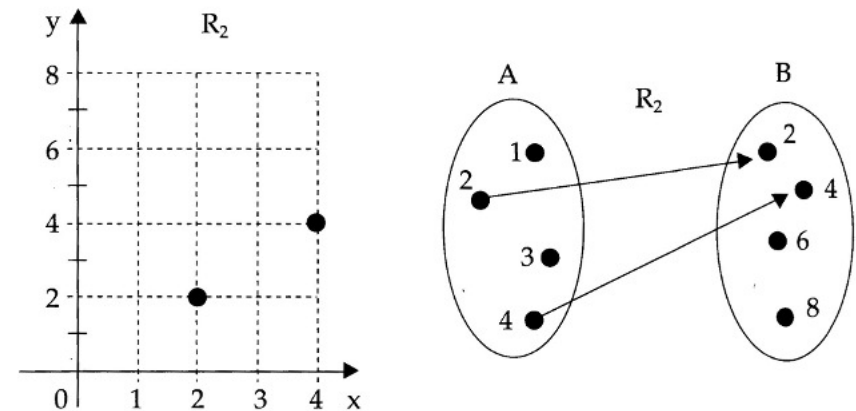
$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}.$$

Esse conjunto representa todos os valores y obtidos pelo dobro de x .



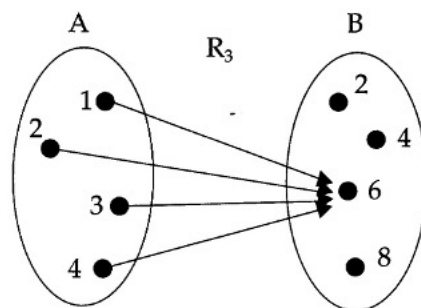
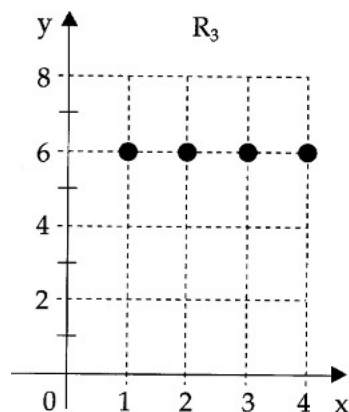
$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}.$$

Esse conjunto representa todos os valores de y que são iguais a x .



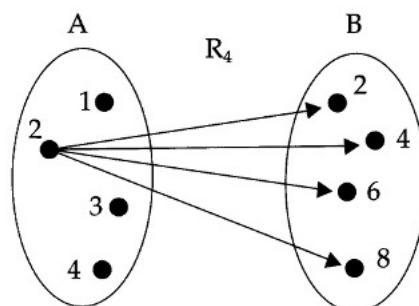
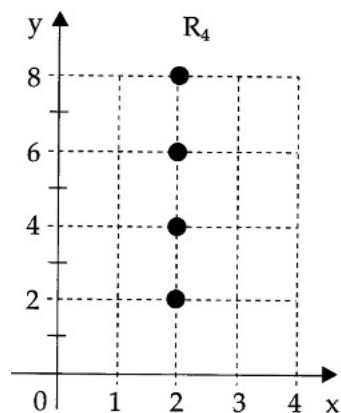
$$R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 6\}.$$

Esse conjunto representa um único valor para y (que é 6), para qualquer valor de x .



$$R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = 2\}.$$

Esse conjunto representa um único valor para x (que é 2), para qualquer valor de y .



Cada um dos conjuntos R_1 , R_2 , R_3 e R_4 nos mostra uma relação entre os elementos de A e B . Eles são denominados *relação* ou *relação binária* de A em B .

Definição: R é uma *relação binária* de A em $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$.

Os conjuntos R_1 , R_2 , R_3 e R_4 estão contidos em $A \times B$ e são formados por pares ordenados (x, y) em que o elemento x de A é “associado” ao elemento y de B , mediante certo critério de “relacionamento” ou “correspondência”.

Observações:

- 1) A é o conjunto de partida da relação R .
- 2) B é o conjunto de chegada ou contradomínio da relação R .
- 3) Quando o par ordenado (x, y) pertence à relação R , escrevemos xRy , e se o par não pertence à relação, escrevemos $x \nR y$.

4.7 Domínio e imagem

Definição: Seja R uma relação de A em B .

Chama-se *domínio* de R , o conjunto $D(R)$ de todos os primeiros elementos dos pares ordenados pertencentes a R , isto é,

$$x \in D(R) \Leftrightarrow \exists y \in B \mid (x, y) \in R.$$

Denomina-se *imagem* de R , o conjunto $Im(R)$ de todos os segundos elementos dos pares ordenados pertencentes a R , isto é,

$$y \in Im(R) \Leftrightarrow \exists x \in A \mid (x, y) \in R.$$

Como consequência da definição anterior, temos que $D(R) \subset A$ e $Im(R) \subset B$.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, determinar o domínio e imagem da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\}$.

Solução:

Como o domínio é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados e a imagem é o conjunto dos segundos elementos dos pares ordenados, essa relação pode ser escrita como:

Para o elemento zero (0), tem-se $y = 0 + 1 = 1$; para o elemento 1, tem-se $y = 1 + 1 = 2$; para o elemento 2, tem-se $y = 2 + 1 = 3$; e para o elemento 3, tem-se $y = 3 + 1 = 4$.

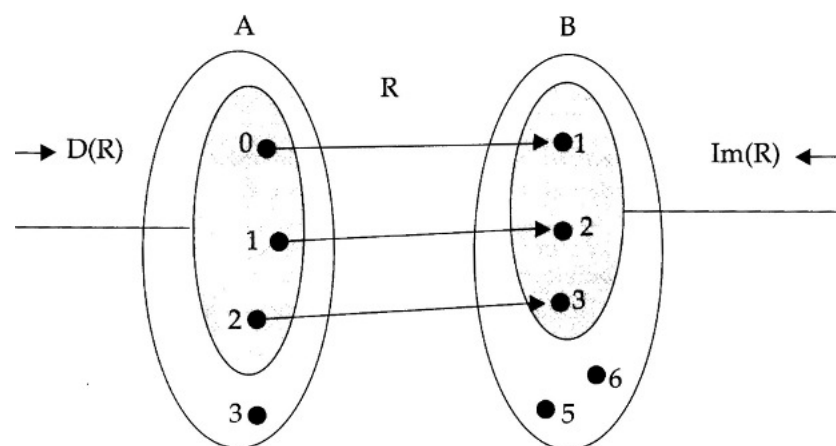
A relação é o conjunto $R = \{(0,1); (1,2); (2,3); (3,4)\}$.

Como o conjunto B não tem o elemento 4, o par ordenado (3, 4) não pode pertencer ao produto cartesiano $A \times B$.

A relação viável é, então, $R = \{(0,1); (1,2); (2,3)\}$.

Como o primeiro elemento do par ordenado define o domínio e o segundo, a imagem, tem-se que o domínio é formado pelos elementos 0, 1 e 2. A imagem é o conjunto dos elementos 1, 2 e 3.

Veja a figura a seguir:



$D(R) = \{0, 1, 2\} \subset A$ e $Im(R) = \{1, 2, 3\} \subset B$.

1.8 Relação inversa

Definição: Dada uma relação binária R de A em B , consideremos o conjunto:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in A \times B\}$$

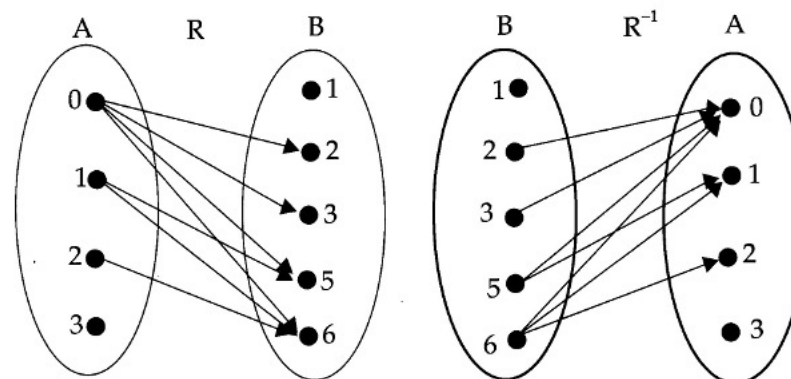
Como R^{-1} é subconjunto de $B \times A$, temos que é uma relação binária de B em A . Essa relação será denominada *relação inversa de R* .

Exemplos:

1) $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y > 2x + 1\}$.

$$R = \{(0,2); (0,3); (0,5); (1,5); (1,6); (2,6)\}.$$

A relação inversa é $\{(2,0); (3,0); (5,0); (5,1); (6,1); (6,2)\}$, ou seja, os primeiros elementos dos pares ordenados da relação R passam a ser os segundos elementos da relação inversa e os segundos elementos da relação inversa são os primeiros da relação inicial.



$$R = \{(0,2), (0,3), (0,5), (0,6), (1,5), (1,6), (2,6)\}$$

$$R^{-1} = \{(2,0), (3,0), (5,0), (5,1), (6,0), (6,1), (6,2)\} = \{(y, x) \in B \times A \mid x < \frac{y-1}{2}\}$$

$$D(R) = \{0, 1, 2\} \text{ e } Im(R) = \{2, 3, 5, 6\}$$

$$D(R^{-1}) = \{2, 3, 5, 6\} = Im(R) \text{ e } Im(R^{-1}) = \{0, 1, 2\} = D(R)$$

$$\therefore A = [1, 4], B = [2, 9] \text{ e } R = \{(x, y) \in A \times B \mid y \leq 2x\}.$$

A relação R é o conjunto de pares ordenados cujos primeiros elementos pertencem ao conjunto A , e os segundos elementos são obtidos calculando-se todos os números menores ou iguais ao dobro de todos os primeiros elementos de A .

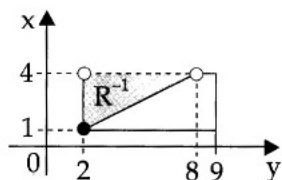
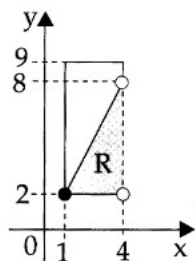
Por exemplo, para o valor **1** do conjunto A , tem-se $y = 2 \times 1 = 2$. O primeiro ponto da relação R é o ponto $(1, 2)$ e o último, o ponto $(4, 8)$.

A relação inversa terá como primeiro ponto o par $(2, 1)$ e o último $(8, 4)$.

Pode-se observar que a relação inversa é obtida por pares do tipo

$$x; y = \frac{x}{2}.$$

isso pode ser visualizado no gráfico a seguir.



$$\mathcal{D}(R) = A \text{ e } \text{Im}(R) = [2, 8]$$

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid x \geq \frac{y}{2}\}$$

$$\mathcal{D}(R^{-1}) = [2, 8] \text{ e } \text{Im}(R^{-1}) = A$$

Propriedades:

$$) \mathcal{D}(R^{-1}) = \text{Im}(R)$$

$$) \text{Im}(R^{-1}) = \mathcal{D}(R)$$

$$) (R^{-1})^{-1} = R$$

4.9 Exercícios resolvidos

- 1) Calcular a distância entre os pontos $A(-2, -1)$ e $B(6, 7)$. Quais as coordenadas do ponto médio do segmento que liga esses dois pontos?

Solução:

A distância é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (7 - (-1))^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}.$$

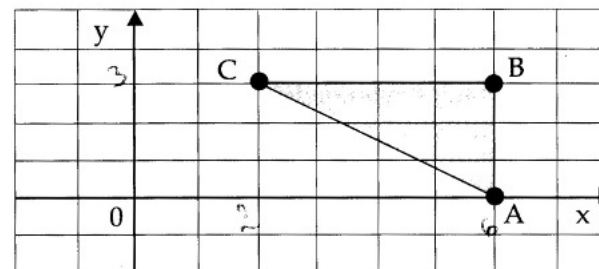
O ponto médio é:

$$P_m(x_m, y_m) = P_m\left(\frac{6 + (-2)}{2}, \frac{7 + (-1)}{2}\right) = P_m(2, 3)$$

- 2) Dados os pontos $A(6, 0)$, $B(6, 3)$ e $C(2, 3)$:

- a) Calcular o perímetro do triângulo ABC .
b) Verificar que esse triângulo é retângulo e calcular sua área.

Solução:



- a) O perímetro do triângulo é a soma de seus lados. Obtendo-se as distâncias entre os seus vértices e somando-se, tem-se o perímetro:

$$d(A, B) = \sqrt{(6 - 6)^2 + (3 - 0)^2} = 3; \quad d(B, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (3 - 3)^2} = 4;$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2 - 6)^2 + (3 - 0)^2} = 5$$

$$2p = d(A, B) + d(B, C) + d(A, C) = 3 + 4 + 5 = 12$$

- 3) Usando o Teorema de Pitágoras, verificamos que ABC é um triângulo retângulo, pois $d^2(A,C) = d^2(B,C) + d^2(A,B)$, isto é, $5^2 = 4^2 + 3^2$.

A área de um triângulo retângulo é igual à metade do produto das medidas de seus catetos. Daí, $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ unidades de área.

(Os triângulos retângulos de lados 3, 4 e 5 são chamados *triângulos pitagóricos*.)

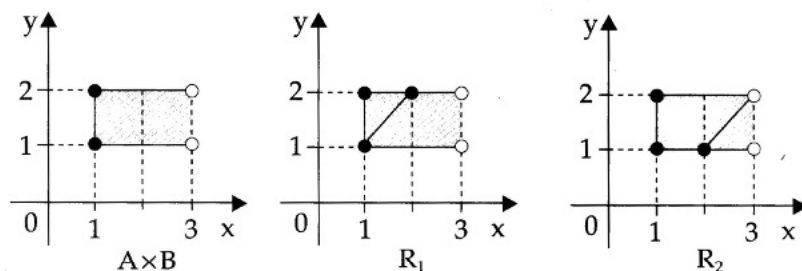
- 3) Sejam $A = [1,3]$ e $B = [1,2]$. Represente graficamente $A \times B$ e as relações $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x\}$ e $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$.

Solução:

$A \times B$ é formado por todos os elementos (x,y) , tais que $x \in [1,3]$ e $y \in [1,2]$.

A relação R_1 é formada por todos os elementos dentro do retângulo definido por $A \times B$, onde os valores de x são iguais aos valores de y . Por exemplo, se $x = 1$, $y = 1$; se $x = 1,4$, $y = 1,4$; e assim sucessivamente até o ponto $x = 2$, $y = 2$ (é um segmento de reta que passa pelos pontos $(1,1)$ e $(2,2)$).

A relação R_2 é obtida a partir do retângulo definido por $A \times B$, onde os valores de y são obtidos subtraindo-se 1 dos valores de x . Por exemplo, se $x = 2$, tem-se $y = 2 - 1 = 1$ e se $x = 3$, $y = 3 - 1 = 2$ (é um segmento de reta que passa pelos pontos $(2,1)$ e não chega ao ponto $(3,2)$).



- 4) Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Determinar o domínio e imagem das seguintes relações (veja no item Relação binária):

- a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 6\}$
 b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x\}$ d) $R_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = 2\}$

Solução:

- a) A relação R_1 é o conjunto $\{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$. O domínio dessa relação são os primeiros elementos dos pares, ou seja, 1, 2, 3, 4. A imagem da relação são os segundos elementos dos pares, ou seja, 2, 4, 6, 8. Logo:

$$D(R_1) = A \text{ e } Im(R_1) = B.$$

- b) A relação R_2 é o conjunto $\{(2,2), (4,4)\}$. Logo:

$$D(R_2) = \{2, 4\} \text{ e } Im(R_2) = \{2, 4\}.$$

- c) A relação R_3 é o conjunto $\{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6)\}$. Logo:

$$D(R_3) = A \text{ e } Im(R_3) = \{6\}.$$

- d) A relação R_4 é o conjunto $\{(2,2), (2,4), (2,6), (2,8)\}$. Logo:

$$D(R_4) = \{2\} \text{ e } Im(R_4) = B.$$

- 5) No exercício 3, resolvido anteriormente, determine o domínio e a imagem das relações R_1 e R_2 .

Solução:

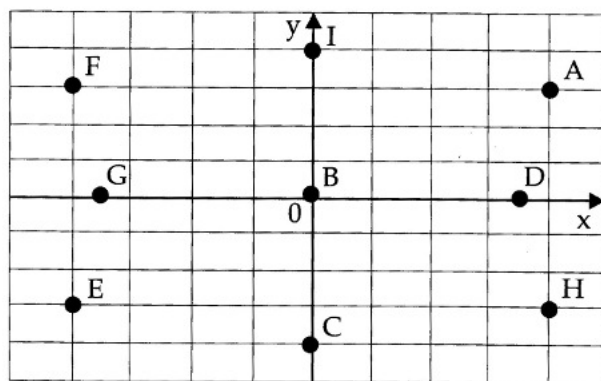
Os domínios das relações podem ser obtidos pelos valores viáveis no eixo x e a imagem, pelos valores viáveis no eixo y .

$$D(R_1) = [1, 2] \text{ e } Im(R_1) = [1, 2]$$

$$D(R_2) = [2, 3] \text{ e } Im(R_2) = [1, 2]$$

4.10 Exercícios propostos

- 1) Determinar a e b , de modo que os pares ordenados a seguir sejam iguais:
 - a) $(2a-2, b+3)$ e $(3a+5, 2b-7)$.
 - b) $(2a, a-8)$ e $(1-3b, b)$.
 - c) $(a^2+a, 2b)$ e $(6, b^2)$.
 - d) $(b^2, |a|)$ e $(4, 3)$.
- 2) Dados os pares ordenados $(3, 2)$, $(0, 4)$, $(-1, 6)$, $(2, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, -5)$, determinar quais deles pertencem ao conjunto S dos pares (x, y) , tais que $y = 2x - 4$.
- 3) Sabendo-se que $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, determinar:
 - a) O conjunto S_1 dos pares (x, y) , tais que $y + x = 1$.
 - b) O conjunto S_2 dos pares (x, y) , tais que $2y - x = 0$.
 - c) $S_1 \cap S_2$.
- 4) Determinar as coordenadas de cada ponto, na figura a seguir:



- 5) Determinar se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):
 - a) $(1, 5) = \{1, 5\}$
 - b) $\{7, -10\} = \{-10, 7\}$
 - c) $(7, -10) = (-10, 7)$
 - d) $(-5, 4) \in 3^\circ$ quadrante
 - e) $4 \in \{(0, 1), (1, 4), (4, 4)\}$
 - f) $(5, -4) \in 3^\circ$ quadrante
 - g) $(1, 4) \in \{(0, 1), (1, 4), (4, 4)\}$
 - h) $(-5, -4) \in 3^\circ$ quadrante
 - i) $(0, 5) \in$ eixo x
 - j) $\{(0, 1), (1, 4)\} = \{(1, 4), (0, 1)\}$
- 6) Determinar o valor de a , de modo que:
 - a) $(5a-3, -4a+2)$ pertença ao 1° quadrante.
 - b) $(a+\sqrt{3}, -2a-4)$ pertença ao 4° quadrante.
- 7) Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{-2, 1\}$ e $C = \{-1, 0, 1\}$, representar, pelos elementos, os seguintes produtos:
 - a) $A \times B$
 - b) $B \times A$
 - c) $A \times C$
 - d) $C \times A$
 - e) B^2
 - f) C^2
- 8) Dados os conjuntos $A = [1, 3]$, $B = [-3, 1)$ e $C = (-2, 1]$, representar graficamente os produtos:
 - a) $A \times B$
 - b) $B \times A$
 - c) $A \times C$
 - d) $C \times B$
 - e) B^2
- 9) Sabendo-se que $\{(0, 2), (2, 1)\} \subset A^2$ e que $\#(A^2) = 9$, represente, pelos elementos, o conjunto A^2 .
- 10) Considerando-se $A \subset B$, $\{(2, 3), (0, 1), (1, 0)\} \subset A \times B$ e $\#(A \times B) = 12$, represente $A \times B$ pelos seus elementos.
- 11) Calcular as distâncias entre os pontos:
 - a) $A(2, -1)$ e $B(-1, 2)$

- b) $A(2,3)$ e $B(-3,-4)$
- 12) Determinar as coordenadas do ponto médio do segmento que liga os pontos:
- a) $A(2,-1)$ e $B(-1,2)$
- b) $A(2,3)$ e $B(-3,-4)$
- 13) Dados os pontos $A(3,8)$, $B(7,5)$ e $C(-1,5)$, provar que o triângulo ABC é isósceles.
- 14) Determinar a , de modo que a distância de $(a,-1)$ e $(1,2)$ seja cinco unidades.
- 15) Determinar a , de forma que o ponto $(5,a)$ seja equidistante (a mesma distância) dos pontos $(2,1)$ e $(1,2)$.
- 16) Dados os conjuntos $A = \{-4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, determinar as seguintes relações de A em B:
- a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x\}$
- b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x + 1\}$
- c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$
- d) $R_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = |x|\}$
- 17) Seja $A = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$. Determine:
- a) $R_1 = \{(x,y) \in A^2 \mid y = x^{-1}\}$
- b) $R_2 = \{(x,y) \in A^2 \mid y = x - \frac{1}{2}\}$
- 18) Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, determine as seguintes relações:
- a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x + y < 9\}$

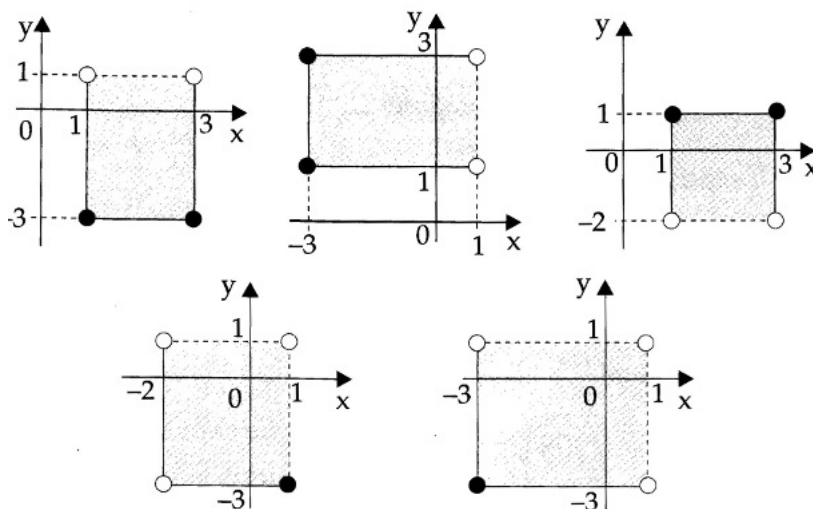
- b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid x \cdot y = 12\}$
- c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid x^2 + y^2 \leq 20\}$
- 19) Dados $A = [1, 9]$, $B = (2, 8]$ e a relação $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = 2x - 6\}$, representar, no mesmo plano cartesiano, $A \times B$ e R .
- 20) Determinar o domínio e a imagem das relações binárias definidas a seguir, sendo os conjuntos:
 $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$:
- a) $R_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x + y = 3\}$
- b) $R_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2 - 1\}$
- c) $R_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid x^2 = y^2\}$
- d) $R_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid x + y > 4\}$
- e) $R_5 = \{(x,y) \in A \times B \mid (x - y)^2 = 1\}$
- 21) Determine o domínio e a imagem da relação R , definida no exercício proposto 19.
- 22) Determine o domínio e a imagem das relações inversas das relações binárias, definidas no exercício proposto 20.
- 23) O mesmo para o exercício proposto 21.

4.11 Respostas dos exercícios propostos

- 1) a) $a = -7$ e $b = 10$
 b) $a = 5$ e $b = -3$
 c) $a = -3$ ou $a = 2$ e $b = 0$ ou $b = 2$
 d) $a = \pm 3$ e $b = \pm 2$
- 2) $(3, 2)$, $(2, 0)$ e $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$.

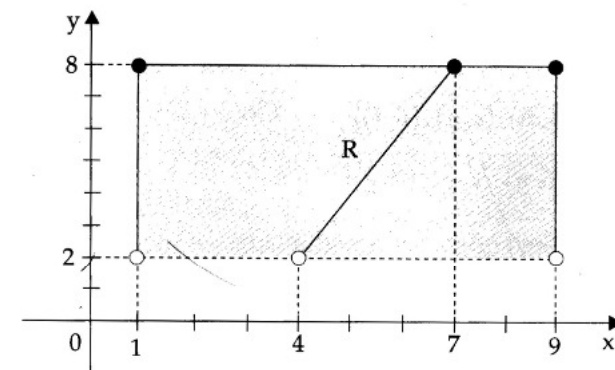
- 3) a) $\{(0,1);(1,0)\}$ b) $\{(0,0);(2,1)\}$ c) $\{ \}$
- 4) $A(4,3), B(0,0), C(0,-4), D\left(\frac{7}{2},0\right), E(-4,-3), F(-4,3), G\left(-\frac{7}{2},0\right), H(4,-3), I(0,4)$
- 5) F, V, F, F, F, V, V, F, V
- 6) a) $\frac{3}{5} < a < \frac{3}{4}$ b) $a > -\sqrt{3}$
- 7) a) $A \times B = \{(1,-2), (1,1), (3,-2), (3,1), (5,-2), (5,1)\}$
- b) $B \times A = \{(-2,1), (-2,3), (-2,5), (1,1), (1,3), (1,5)\}$
- c) $A \times C = \{(1,-1), (1,0), (1,1), (3,-1), (3,0), (3,1), (5,-1), (5,0), (5,1)\}$
- d) $C \times A = \{(-1,1), (-1,3), (-1,5), (0,1), (0,3), (0,5), (1,1), (1,3), (1,5)\}$
- e) $B^2 = \{(-2,-2), (-2,1), (1,-2), (1,1)\}$
- f) $C^2 = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$

3)



- 9) $A^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$
- 10) $A \times B = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3)\}$
- 11) a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{74}$
- 12) a) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- 14) $a = -3$ ou $a = 5$
- 15) $a = 5$
- 16) a) $R_1 = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8)\}$
- b) $R_2 = \{ \}$
- c) $R_3 = \{(-2,4), (0,0), (2,4)\}$
- d) $R_4 = \{(-4,4), (-2,2), (0,0), (2,2), (4,4)\}$
- 17) a) $R_1 = \left\{ \left(\frac{1}{3}, 3\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), (1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right) \right\}$
- b) $R_2 = \left\{ \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}\right) \right\}$
- 18) a) $R_1 = \{(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (5,3)\}$
- b) $R_2 = \{(2,6), (3,4), (4,3)\}$
- c) $R_3 = \{(2,3), (2,4), (3,3)\}$

19)



- 20) a) $D(R_1) = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(R_1) = \{1, 2, 3, 4\}$
 b) $D(R_2) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $\text{Im}(R_2) = \{-1, 0, 3\}$
 c) $D(R_3) = A$ e $\text{Im}(R_3) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 d) $D(R_4) = \{1, 2\}$ e $\text{Im}(R_4) = \{3, 4\}$
 e) $D(R_5) = A$ e $\text{Im}(R_5) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

21) $D(R) = (4, 7]$ e $\text{Im}(R) = B$

- 22) a) $D(R_1^{-1}) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\text{Im}(R_1^{-1}) = \{-1, 0, 1, 2\}$
 b) $D(R_2^{-1}) = \{-1, 0, 3\}$ e $\text{Im}(R_2^{-1}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 c) $D(R_3^{-1}) = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $\text{Im}(R_3^{-1}) = A$
 d) $D(R_4^{-1}) = \{3, 4\}$ e $\text{Im}(R_4^{-1}) = \{1, 2\}$
 e) $D(R_5^{-1}) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e $\text{Im}(R_5^{-1}) = A$

23) $D(R^{-1}) = B$ e $\text{Im}(R^{-1}) = (4, 7]$

4.12 Funções

Sejam os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g, h, i\}$ e as relações binárias R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5 , representadas pelos conjuntos a seguir:

$$R_1 = \{(a, g); (b, h), (c, i)\};$$

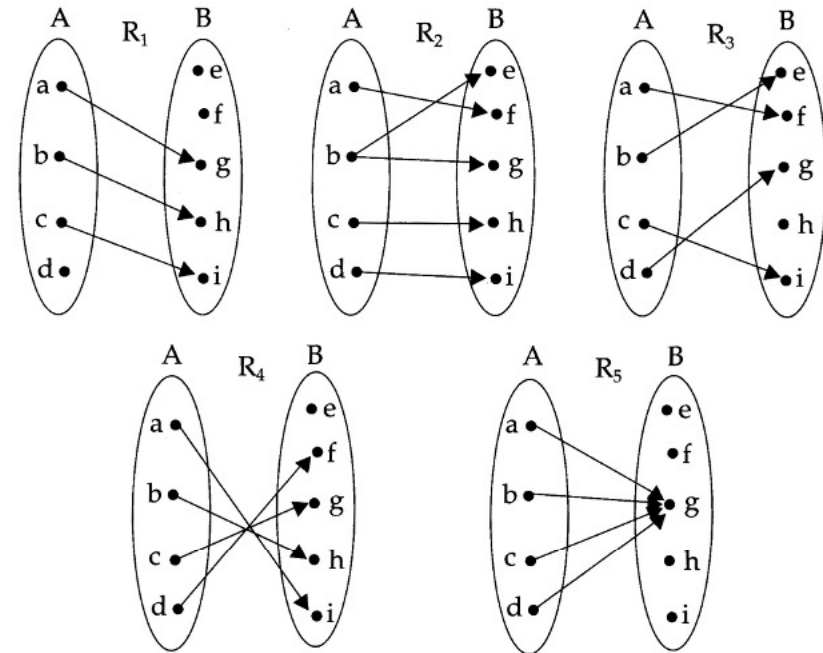
$$R_2 = \{(a, f); (b, e), (b, g), (c, h), (d, i)\};$$

$$R_3 = \{(a, f); (b, e), (c, i), (d, g)\};$$

$$R_4 = \{(a, i); (b, h), (c, g), (d, f)\};$$

$$R_5 = \{(a, g); (b, g), (c, g), (d, g)\}.$$

Essas relações podem ser representadas, graficamente, como:



Analisemos cada uma das relações:

- a) O domínio da relação é $D(R_1) = \{a, b, c\} \neq A$ e a imagem é o conjunto $\text{Im}(R_1) = \{g, h, i\}$.

O domínio dessa relação é diferente de A , pois o conjunto A possui o elemento d e a relação R_1 tem origem nos elementos a, b e c .

Observa-se, nesse caso, que nem todos os elementos dos conjuntos A (elemento d) e B (elementos e e f) são usados.

$$\forall x \in D(R_1), \exists! y \in B, \text{ tal que } (x, y) \in R_1.$$

($\exists!$ significa "existe um único")

- b) O domínio da relação é $D(R_2) = \{a, b, c, d\} = A$ e a imagem é o conjunto $\text{Im}(R_2) = \{e, f, g, h, i\} = B$.

O domínio dessa relação é igual a A , pois todos os elementos de A são originários da relação R_2 .

Observa-se, nesse caso, que todos os elementos dos conjuntos A e B são usados. O elemento b do conjunto A tem duas imagens (e e g).

$\forall x \in D(R_2), \exists y \in B$, tal que $(x, y) \in R_2$, mas não é imagem única, pois $(b, e) \in R_2$ e $(b, g) \in R_2$.

O domínio da relação é $D(R_3) = \{a, b, c, d\} = A$ e a imagem é o conjunto $\text{Im}(R_3) = \{e, f, g, i\}$.

O domínio da relação R_3 é igual a A .

Observa-se, nesse caso, que os elementos do conjunto A são todos usados e o elemento h , do conjunto B , não é utilizado.

$\forall x \in D(R_3), \exists! y \in B$, tal que $(x, y) \in R_3$.

O domínio da relação é $D(R_4) = \{a, b, c, d\} = A$ e a imagem é o conjunto $\text{Im}(R_4) = \{f, g, h, i\}$.

O domínio da relação R_4 é igual a A .

Observa-se, nesse caso, que os elementos do conjunto A são todos usados e o elemento e do conjunto B não é utilizado.

$\forall x \in D(R_4), \exists! y \in B$, tal que $(x, y) \in R_4$.

O domínio da relação é $D(R_5) = \{a, b, c, d\} = A$ e a imagem é o conjunto $\text{Im}(R_5) = \{g\}$.

O domínio da relação R_5 é igual a A .

Observa-se, nesse caso, que os elementos do conjunto A são todos usados e somente o elemento g do conjunto B é utilizado.

$\forall x \in D(R_5), \exists! y \in B$, tal que $(x, y) \in R_5$.

As relações R_3 , R_4 e R_5 apresentam a particularidade de, para todo elemento de A , associar um único elemento de B . Essas relações recebem o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* ou, simplesmente, *função de A em B* .

12.1 Definição

Sejam dois conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$, não-vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de *aplicação de A em B* ou *função definida em A com imagens em B* , simplesmente, *função de A em B* se, e somente se, para todo elemento de A existir um único elemento y em B , tal que $(x, y) \in f$.

$$f \text{ é função de } A \text{ em } B \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists! y \in B, \text{ tal que } (x, y) \in f$$

4.12.2 Notação

Como toda função é uma relação binária de A em B , existe, geralmente, uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei de correspondência entre os elementos dos dois conjuntos.

Para indicarmos uma função f , definida em A com imagens em B , segundo a lei de correspondência $y = f(x)$, usaremos a notação:

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y$$

Por motivo de simplificação, muitas vezes usaremos somente a lei de correspondência, $y = f(x)$, para indicar a função, ficando claro que $x \in A \subset \mathbb{R}$ e $y \in B \subset \mathbb{R}$, sendo f uma função de A em B .

Exemplos:

$$1) f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = 7x$$

$$2) f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \frac{1}{2x+4}$$

$$3) f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = x^2 - 1$$

$$4) f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \sqrt{x-8}$$

Observações:

- 1) x é denominada *variável independente* da função (varia sem depender de nenhuma outra variável).
- 2) y é chamada *variável dependente* da função (como $y = f(x)$, temos que y depende da variação da variável x).

4.12.3 Domínio e imagem

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ uma função.

Definimos $D(f) = A$ como o *domínio*, $CD(f) = B$, o *contradomínio* e $\text{Im}(f) \subset CD(f) = B$, o conjunto imagem da função f .

Como a função é uma relação, esse conceito é uma extensão do anterior.

Para determinarmos o domínio (leia “o maior domínio”) de uma função, estaremos procurando qual o maior conjunto possível $A \subset \mathbb{R}$ que satisfaça a lei de correspondência definida (lembremo-nos de que, para termos uma função, todos os elementos do conjunto A têm de estar associados a um elemento em B).

exemplos:

ja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ uma função. Vamos determinar o (maior) domínio das seguintes leis de correspondência:

$$f(x) = y = 7x.$$

Nesse caso, não existe nenhum valor de $x \in \mathbb{R}$ que não possa ser multiplicado por 7. Logo, qualquer $x \in \mathbb{R}$ terá um valor $y \in \mathbb{R}$ associado a ele. ou, $D(f) = A = \mathbb{R}$.

$$f(x) = y = \frac{1}{2x+4}.$$

Como a divisão por zero é impossível, $2x+4 \neq 0$.

Temos, então, que $x \neq -2$.

Logo, $D(f) = A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

$$f(x) = y = x^3 - 1.$$

Da mesma forma que no exemplo da letra (a), não existe nenhuma restrição para x .

ou, $D(f) = A = \mathbb{R}$.

$$f(x) = y = \sqrt{x-8}.$$

Sabemos que só existe raiz de índice par (no caso 2) de números positivos ou iguais a zero.

$$-8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 8.$$

ou, $D(f) = A = [8, +\infty)$.

Observação: Uma função f com valores em $\mathbb{R}$ só está bem-definida quando sabemos seu (maior) domínio e sua lei de correspondência.

4.12.4 Funções iguais

Dois funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ e $g : C \subset \mathbb{R} \rightarrow D \subset \mathbb{R}$ são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A$.

Exemplos:

$$1) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ são iguais, pois } |x| = \sqrt{x^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$2) f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ são iguais, pois } |x| = x \text{ para valores de } x \in \mathbb{R}_+.$$

$$3) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ são diferentes para valores de } x \text{ negativos. Por exemplo, se } x = -5, f(-5) = |-5| = 5 \text{ e } g(-5) = -5.$$

4.12.5 Gráfico de uma função

Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, construir seu gráfico é representar, no sistema cartesiano ortogonal (ou plano xy), o conjunto de pontos $\{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\}$.

Faremos, agora, alguns exemplos apenas como ilustração. A partir do próximo capítulo, estudaremos as funções de maneira mais aprofundada.

Exemplos:

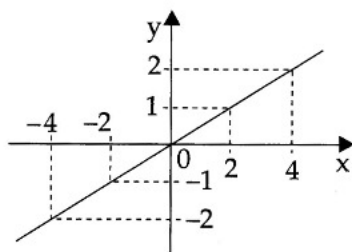
Construir os gráficos das funções:

$$1) f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \text{ e } f(x) = y = \frac{x}{2}$$

O gráfico dessa função é uma reta, onde $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Na tabela a seguir, assume-se os valores para a variável x , na primeira coluna; na segunda coluna, calcula-se o valor da função $f(x) = y = \frac{x}{2}$; e na terceira coluna, tem-se o ponto correspondente a ser colocado no gráfico.

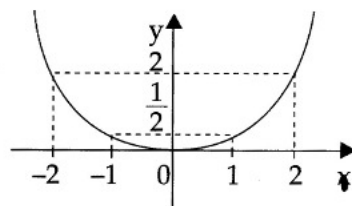
x	$y = \frac{x}{2}$	(x,y)
-4	-2	(-4,-2)
-2	-1	(-2,-1)
0	0	(0,0)
2	1	(2,1)
4	2	(4,2)



$$2) f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto} B \subset \mathbb{R} \\ f(x) = y = \frac{x^2}{2}$$

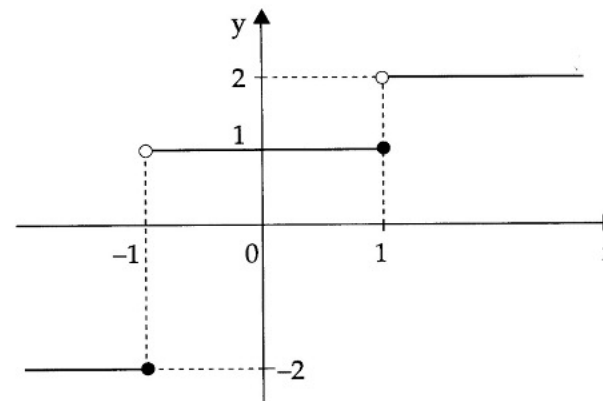
O gráfico dessa função é uma curva chamada parábola, onde $D(f) = \mathbb{R}$
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

x	$y = \frac{x^2}{2}$	(x,y)
-2	2	(-2,2)
-1	$\frac{1}{2}$	$(-1, \frac{1}{2})$
0	0	(0,0)
1	$\frac{1}{2}$	$(1, \frac{1}{2})$
2	2	(2,2)



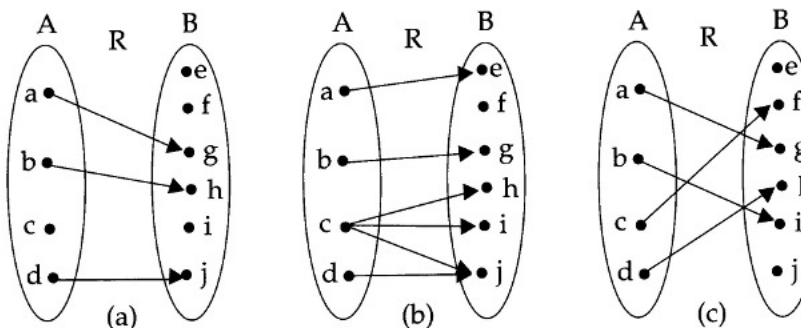
$$3) f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto} B \subset \mathbb{R}, \text{ onde } f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \leq -1 \\ 1 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

O gráfico dessa função é um conjunto de retas, ou seja, para valores de $x \leq -1$, o valor da função é -2; para valores de x entre -1 e 1, o valor da função é 1; e para valores de $x > 1$, o valor da função é 2, podendo ser visualizado no gráfico a seguir, onde $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{-2, 1, 2\}$.



4.12.6 Exercícios resolvidos

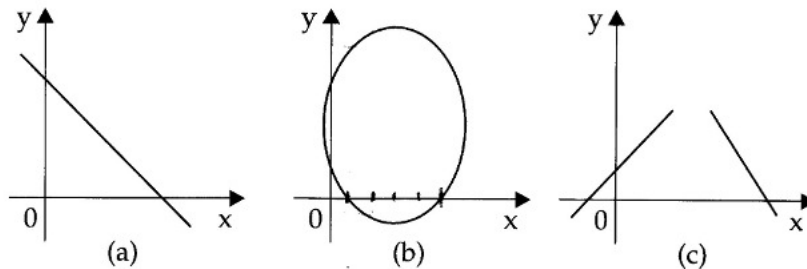
- 1) Determinar se cada um dos esquemas das relações a seguir define ou não uma função de A em B, justificando sua resposta:



Solução:

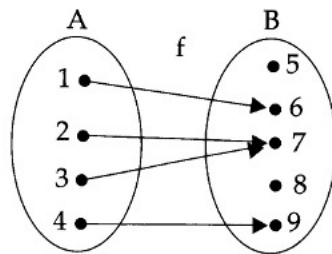
- a) Não é função, pois $c \in A$ não está associado a nenhum elemento do conjunto B, isto é, $D(R) = \{a, b, d\} \neq A$.
 b) Não é função, pois $c \in A$ está associado a três elementos do conjunto B.
 c) É função, pois todo elemento de A está associado a um único elemento em B.

- 2) Determinar as relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem a seguir, que são funções:



Solução:

- a) É função, pois todo elemento de x está associado a um único elemento em y .
 b) Não é função, pois existem vários valores de x com mais de um y associado a eles.
 c) A relação tem um “buraco”. Isso significa que $D(R) \neq A = \mathbb{R}$.
 3) Sabendo que o diagrama a seguir representa uma função de A em B , pede-se:



- a) $f(1), f(2), f(3)$ e $f(4)$. b) $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

Solução:

- a) $f(1)=6$, que é o valor da função para o elemento 1. O elemento $f(2)=7$, $f(3)=7$ e $f(4)=9$.
 b) $D(f) = A = \{1, 2, 3, 4\}$, $CD(f) = B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ e $Im(f) = \{6, 7, 9\}$.

- 4) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = 5x - 8$, determine:

- a) $D(f)$
 b) $f(0)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{3}{5}\right)$ e $f\left(-\frac{4}{7}\right)$.

Solução:

- a) $D(f) = \mathbb{R}$, pois $A \subset \mathbb{R}$.
 b) O valor da função nos pontos desejados é obtido a partir da expressão da função. Como a expressão da função é $f(x) = 5x - 8$, temos:

$$\begin{cases} f(0) = 5 \cdot 0 - 8 = -8 \\ f(-2) = 5 \cdot (-2) - 8 = -18 \\ f\left(\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right) - 8 = 3 - 8 = -5 \\ f\left(-\frac{4}{7}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) - 8 = -\frac{20}{7} - 8 = \frac{-20 - 56}{7} = -\frac{76}{7} \end{cases}$$

- 5) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = 3x - 7$, determine os valores de x para que:

- a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = -\frac{3}{4}$

Solução:

- a) $f(x) = 0$ significa que se deseja calcular o(s) valor(es) de x que anula(m) a função. Logo, $3x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$.
 b) $f(x) = -\frac{3}{4}$ significa que se deseja calcular o(s) valor(es) de x que faz(em) a função ser igual a $-\frac{3}{4}$. Logo, $\Rightarrow 3x - 7 = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{25}{12}$.

- 6) Determinar o domínio das seguintes funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$:

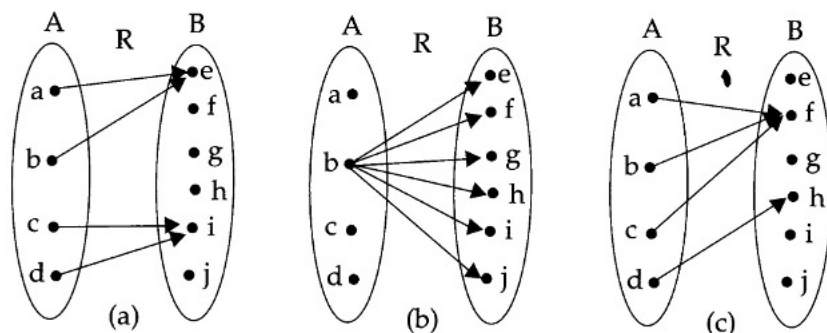
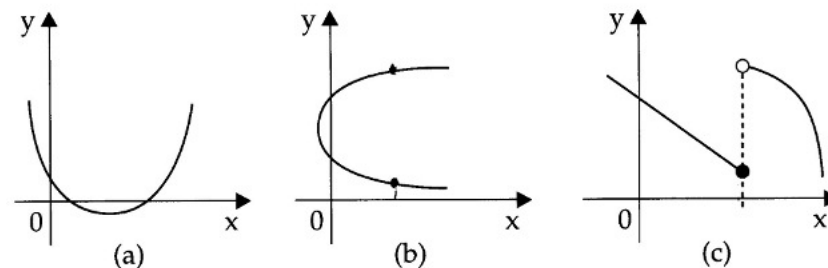
- a) $f(x) = 5x^4 + 4x^2 + 2x - 1$
 b) $f(x) = \frac{3}{x^3}$

c) $f(x) = \sqrt{x-2}$

d) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x}}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}}$

Solução:

a) $D(f) = \mathbb{R}$, pois A é um subconjunto de $\mathbb{R}$.b) $x \neq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^*$, pois não se pode ter denominador nulo.c) $x-2 \geq 0$, pois a raiz quadrada é um número positivo. Daí, $x \geq 2 \Rightarrow D(f) = [2, +\infty)$.d) $4-x > 0 \Rightarrow x < 4 \Rightarrow D(f) = (-\infty, 4)$.e) $x-2 \geq 0$ e $4-x > 0 \Rightarrow x \geq 2$ e $x < 4 \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow D(f) = [2, 4)$.**4.12.7 Exercícios propostos**1) Determinar se cada um dos esquemas das relações a seguir define ou não uma função de A em B , justificando sua resposta.2) Determinar as relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, cujos gráficos aparecem a seguir, que são funções:

3) Determinar se as sentenças a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) Toda relação é uma função.

b) Toda função é uma relação.

c) Se a relação R de A em B é uma função, então o domínio de R é A .4) Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine as relações de A em B que são funções:

a) $R_1 = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5)\}$ ✓

b) $R_2 = \{(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$ ✓

c) $R_3 = \{(0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$ ✓

d) $R_4 = \{(0, 4), (1, 5), (2, 0)\}$ ✗

5) O mesmo para os conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e as relações:

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$ ✓

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$ ✓

c) $R_3 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$ ✓

d) $R_4 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = |x|\}$ ✓

6) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = x^2 - 2x - 2$, determine:

a) $D(f)$

b) $f(0), f(-2), f\left(\frac{3}{5}\right)$ e $f\left(-\frac{4}{7}\right)$.

) Determinar o domínio das seguintes funções $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} : f(x)=y$:

) $f(x) = x^2 + 2x$

e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 9}$

) $f(x) = \frac{x}{2x-7}$

f) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{4-x}}$

g) $f(x) = \sqrt{x-2} - \frac{x+1}{x-3}$

) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-9}$

h) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$

1.13 Respostas dos exercícios propostos

) a) É função

b) Não é função

c) É função

) a) É função

b) Não é função

c) É função

) a) F

b) V

c) V

) a) Função

b) Função

c) Só relação

d) Só relação

) a) Não é função

b) É função

c) É função

d) É função

) a) $\mathbb{R}$

b) $-2; 6; -\frac{71}{25}; -\frac{138}{49}$

) a) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

f) $[2, +\infty)$

c) $[2, 4) \cup (4, +\infty)$

g) $[2, 3) \cup (3, +\infty)$

d) $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

h) $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Funções do 1º grau

Este capítulo habilita o leitor a trabalhar com a reta sob várias formas de apresentação. São as primeiras funções específicas com as quais vamos trabalhar.

5.1 Definição

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Chama-se *função polinomial do 1º grau* a função

$$f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} : f(x) = y = ax + b.$$

Observação: O domínio de uma função polinomial do 1º grau é $\mathbb{R}$.

Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} : f(x) = y$.

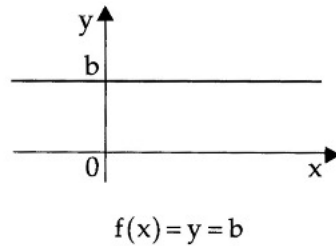
1) $f(x) = y = 3x + 15$, onde $a = 3$ e $b = 15$.

2) $f(x) = y = -7x$, onde $a = -7$ e $b = 0$.

5.2 Função constante

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} : f(x) = y = ax + b$. Se, particularmente, tivermos $a = 0$, essa função polinomial se torna de grau zero e é chamada *função constante*.

Observações: O domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem da função, o conjunto $\{b\}$. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo x , passando pelo ponto $(0, b)$.



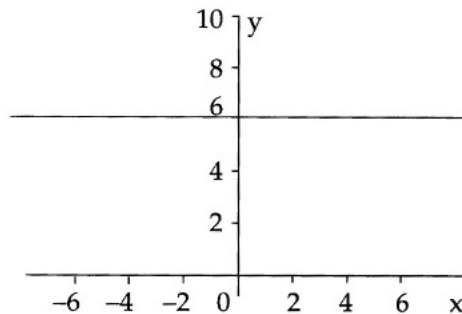
Exemplo:

Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ \quad \quad \quad \mapsto f(x) = y = 6$$

Como o valor da função é 6, independente do valor de x , o domínio é $\mathbb{R}$ e a imagem, $\{6\}$.

Gráfico:



5.3 Exercícios resolvidos

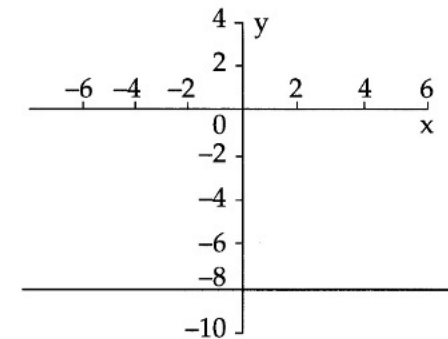
Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:

1) $f(x) = y = -8$

Solução:

Como o valor da função é (-8) , independente do valor de x , $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{-8\}$.

Gráfico:

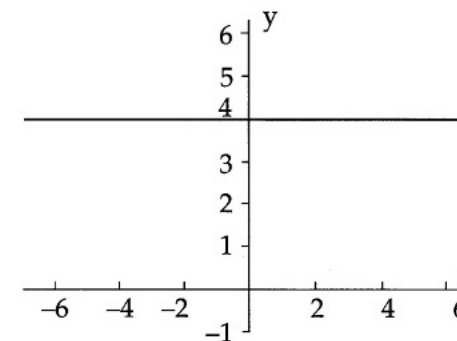


2) $f(x) = y = 4$

Solução:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \{4\}.$$

Gráfico:

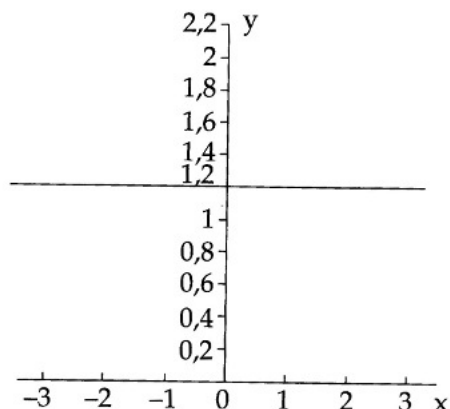


3) $f(x) = y = \frac{5}{4}$

Solução:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \left\{\frac{5}{4}\right\}.$$

Gráfico:



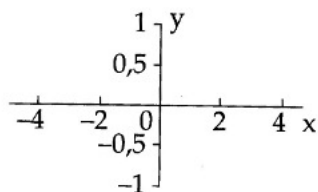
4) $f(x) = y = 0$

Solução:

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{0\}$.

Nesse caso, a reta será o próprio eixo das abscissas.

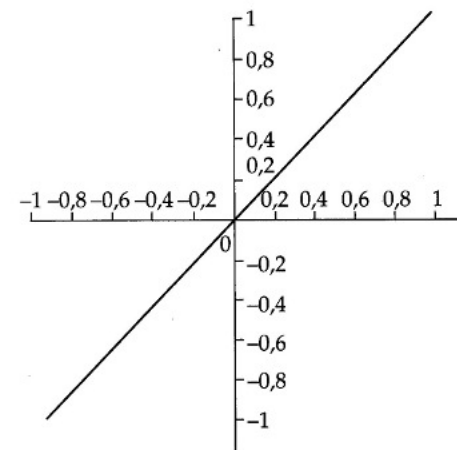
Gráfico:



5.4 Função identidade

Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = ax + b$. Se $a = 1$ e $b = 0$, a função setorna $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = x$, e é chamada *função identidade*.

Observações: Veremos, mais tarde, que essa função tem uma importância muito grande para o estudo de outras funções. Seu gráfico é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



5.5 Função linear

Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = ax + b$. Se $a \neq 0$ e $b = 0$, a função setorna $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = ax$, e é chamada *função linear*.

Exemplos:

1) $f(x) = y = 3x$, onde $a = 3$.

2) $f(x) = y = -5x$, onde $a = -5$.

3) $f(x) = y = -x$, onde $a = -1$.

4) $f(x) = y = \frac{\sqrt{2}}{3}x$, onde $a = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Observações: É natural observar que a função identidade é um caso particular de função linear, onde $a = 1$.

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Para esboçarmos o gráfico, que é uma reta que passa pela origem, basta determinarmos outro ponto além de $(0, 0)$.

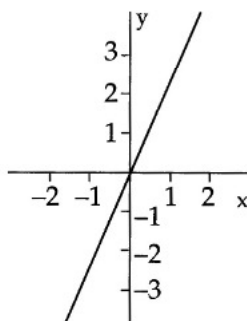
5.6 Exercícios resolvidos

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)=y$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:

1) $f(x) = y = 3x$

Solução:

Como o gráfico é uma reta que passa pelo ponto $(0, 0)$, determinemos um segundo ponto pertencente a essa função, por exemplo, (para $x=1$ o valor da função é $y=3 \times 1=3$) o ponto $(1; f(1)) = (1; 3)$ e, unindo esses dois pontos, vamos desenhar este gráfico:

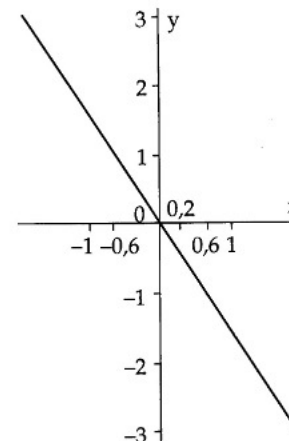


$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = y = -3x$

Solução:

Como o gráfico é uma reta que passa pelo ponto $(0, 0)$, determinemos um segundo ponto pertencente a essa função; por exemplo, $(1; f(1)) = (1; -3)$ e, unindo esses dois pontos, vamos desenhar este gráfico:



$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

5.7 Função afim

Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = y = ax + b$. Se $a \neq 0$, ela é chamada *função afim*.

Exemplos:

1) $f(x) = y = 3x - 5$, onde $a = 3$ e $b = -5$.

2) $f(x) = y = -2x + 3$, onde $a = -2$ e $b = 3$.

3) $f(x) = y = -\sqrt{2}x$, onde $a = -\sqrt{2}$ e $b = 0$.

4) $f(x) = y = x$, onde $a = 1$ e $b = 0$.

Observações: É natural observar que as funções identidade e linear são casos particulares da função afim.

O gráfico de uma função afim é uma reta inclinada.

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

A função afim é também denominada *função do 1º grau*. Para esboçarmos seu gráfico, que é uma reta, basta determinarmos dois pontos da função.

5.8 Exercícios resolvidos

1) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:

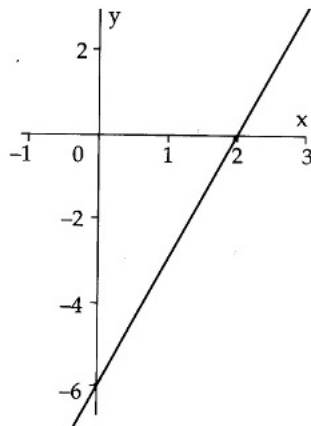
a) $f(x) = y = 3x - 6$

Solução:

Como o gráfico é uma reta, determinemos dois pontos dessa curva:

x	f(x) = y
0	$3 \times 0 - 6 = -6$
2	$3 \times 2 - 6 = 0$

Unindo esses dois pontos, temos o gráfico:



$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

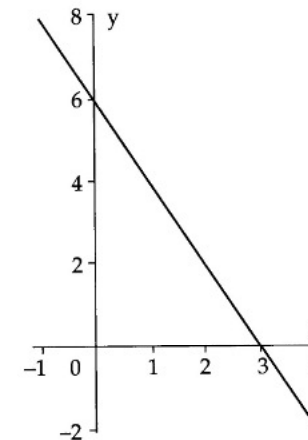
b) $f(x) = y = -2x + 6$

Solução:

Como o gráfico é uma reta, determinemos dois pontos dessa curva:

x	f(x) = y
0	6
3	0

Unindo esses dois pontos, temos o gráfico:



$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = y = 2x + 7$

Solução:

Como o gráfico é uma reta, determinemos dois pontos dessa curva:

x	f(x) = y
0	7
-1	5

Unindo esses dois pontos, temos o gráfico:

Daí, como $(2; 1) \in \text{reta}$ e $a = 3 \Rightarrow 1 = 3 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -5$.

Substituindo-se os valores de a e b na forma geral, temos que $y = 3x - 5$.

- 2) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-3; -1)$ e tem coeficiente linear igual a 1.

Solução:

$$y = ax + b; b = 1; (-3; -1) \in \text{reta}$$

$$(-3; -1) \in \text{reta} \text{ e } b = 1 \Rightarrow -1 = a \cdot (-3) + 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{Daí, } y = \frac{2}{3}x + 1.$$

- 3) Calcule o zero da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

Solução:

Calcular o zero de uma função significa calcular o(s) valor(es) de x que anula(m) a função.

Igualando-se a função a zero, temos:

$$y = -7x + 2 = 0 \Rightarrow -7x = -2 \Rightarrow x = \frac{2}{7}$$

- 4) Determinar o ponto $(x; y)$ em que o gráfico da função

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \text{ corta o eixo } x.$$

Solução:

O ponto em que o gráfico da função corta o eixo x é o ponto no qual a função se anula.

$$y = \frac{x}{5} - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \Rightarrow \left(\frac{10}{3}; 0\right)$$

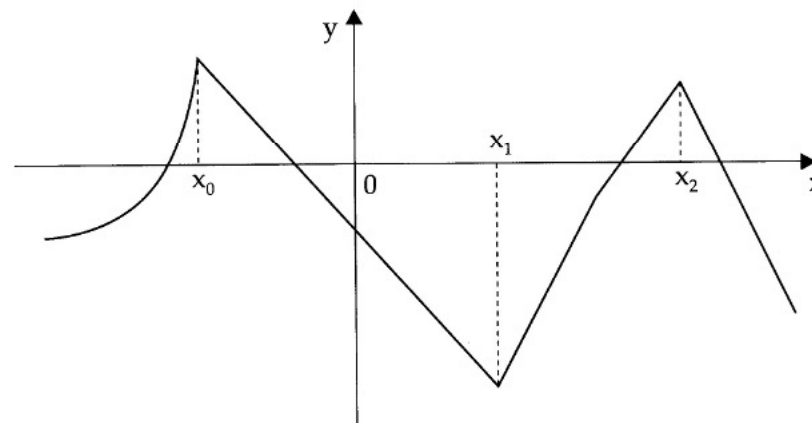
5.11 Funções crescentes e decrescentes

Definição: A função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é *crescente* em um intervalo $I \subset A$ se, $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definição: A função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é *decrescente* em um intervalo $I \subset A$ se, $\forall x_1, x_2 \in I$, se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo:

Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ cujo gráfico é:



f é crescente em $(-\infty; x_0) \cup (x_1; x_2)$

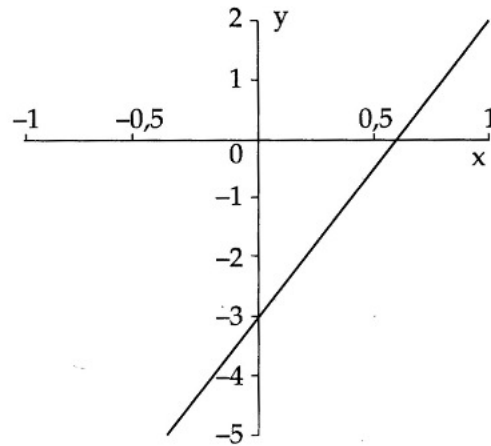
f é decrescente em $(x_0; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

Teorema: A função afim $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é *crescente* (decrescente) se, e somente se, o coeficiente angular for positivo (negativo), isto é, se, e somente se, $a > 0$ ($a < 0$).

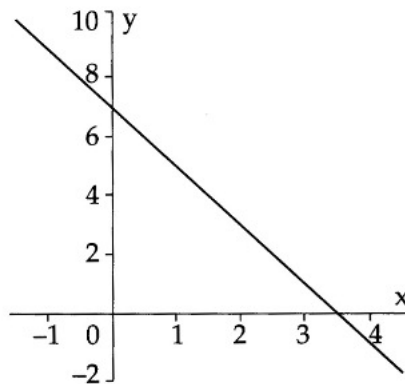
Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

- 1) $f(x) = 5x - 3$ é uma função crescente, pois $a = 5 > 0$.



2) $f(x) = -2x + 7$ é uma função decrescente, pois $a = -2 < 0$.



5.12 Exercícios resolvidos

1) Determine p para que a função $f(x) = (2p + 3)x + 2$ seja decrescente.

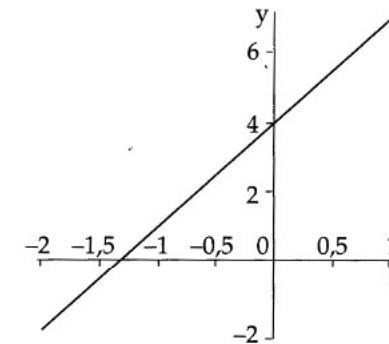
Solução:

Para que uma função linear seja decrescente, o coeficiente angular tem de ser negativo. Logo, $2p + 3 < 0 \Rightarrow p < -\frac{3}{2}$.

2) Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Analise a função e esboce seu gráfico.
 $f(x) = y = 3x + 4$

Solução:

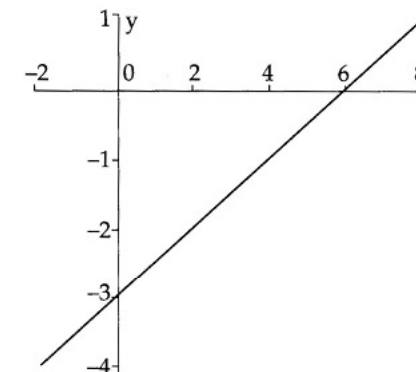
É uma função linear crescente, pois o coeficiente angular é positivo. O domínio e a imagem da função são o conjunto dos números reais. O gráfico é apresentado a seguir:



3) Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Analise a função e esboce seu gráfico.
 $f(x) = y = \frac{1}{2}x - 3$

Solução:

É uma função linear crescente, pois o coeficiente angular é positivo. O domínio e a imagem da função são o conjunto dos números reais. O gráfico é apresentado a seguir:

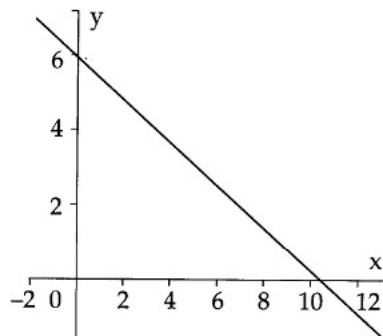


Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Analise a função e esboce seu gráfico.

$$f(x) = y = -\frac{4}{7}x + 6$$

Conclusão:

É uma função linear decrescente, pois o coeficiente angular é negativo. O domínio e a imagem da função são o conjunto dos números reais. O gráfico é apresentado a seguir:

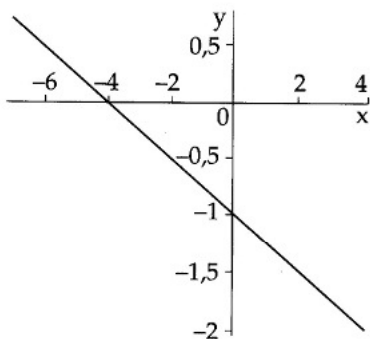


Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Analise a função e esboce seu gráfico.

$$f(x) = y = -\frac{1}{4}x - 1$$

Conclusão:

É uma função linear decrescente, pois o coeficiente angular é negativo. O domínio e a imagem da função são o conjunto dos números reais. O gráfico é apresentado a seguir:



5.13 Sinais de uma função

Seja a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

$$f(x) = y$$

Para que valores de x temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?

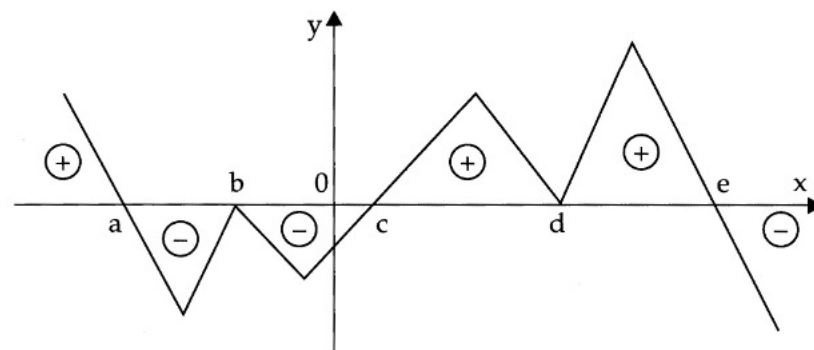
Resolver essa questão é estudar o sinal da função.

Para saber quando $f(x) > 0$, temos de determinar os valores de x , onde $y > 0$, ou seja, os valores de x em que o gráfico está acima do eixo x .

Para saber quando $f(x) = 0$, devemos determinar as raízes da função, ou seja, os valores de x onde o gráfico corta esse eixo.

Para saber quando $f(x) < 0$, temos de determinar os valores de x onde $y < 0$, ou seja, os valores de x onde o gráfico está abaixo do eixo x .

Se tivermos, por exemplo, uma função cujo gráfico é:



Conclusão:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = b \text{ ou } x = c \text{ ou } x = d \text{ ou } x = e$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < a \text{ ou } c < x < d \text{ ou } d < x < e$$

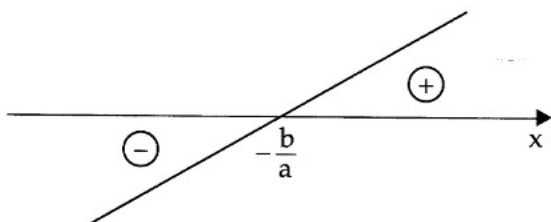
$$f(x) < 0 \Leftrightarrow a < x < b \text{ ou } b < x < c \text{ ou } x > e$$

Quando estamos falando, especificamente, da função afim $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, considerando-se que o zero da função

($f(x) = 0$) seja $x = -\frac{b}{a}$, podemos verificar que:

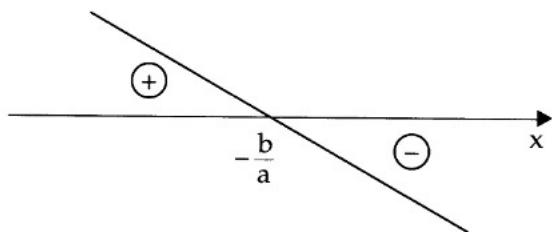
a) Se a função for crescente, isto é, se $a > 0$:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \end{cases}$$



b) Se a função for decrescente, isto é, se $a < 0$:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \\ f(x) = ax + b < 0 \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \end{cases}$$



5.14 Exercícios resolvidos

1) Estudar o sinal da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

Solução:

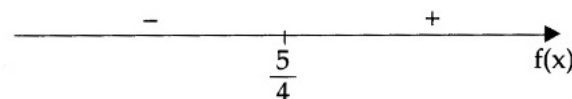
Para se estudar o sinal de uma função, deve-se, inicialmente, determinar o(s) valor(es) de x que anula(m) a função, ou seja, fazer $f(x) = 0$, que é o ponto que a função corta o eixo x .

$$f(x)=0 \Rightarrow 4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$$

Deve-se, então, verificar qual o sinal da função à direita e à esquerda desse ponto. Considere à direita o ponto $x = 2$ (pois $2 > \frac{5}{4}$). Substituindo $x = 2$ na expressão $y = 4x - 5$, tem-se $y = 4 \times 2 - 5 = 3$, que é um número positivo. Pode-se, então, afirmar que, à direita de $x = \frac{5}{4}$, a função é positiva.

Do mesmo modo, toma-se um valor à esquerda de $x = \frac{5}{4}$, por exemplo, $x = 0$ (pois $0 < \frac{5}{4}$). Substituindo na expressão $y = 4x - 5$, tem-se $y = 4 \times 0 - 5 = -5$, que é um número negativo. Pode-se, então, afirmar que à esquerda de $x = \frac{5}{4}$, a função é negativa.

Também poderia ser visto usando-se o coeficiente linear positivo. Como $a = 4 > 0$, a função é crescente e:



Assim,

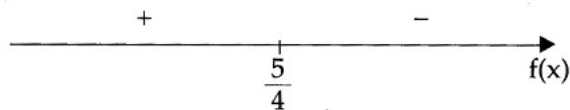
$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } x < \frac{5}{4} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = \frac{5}{4} \\ f(x) > 0 & \text{se } x > \frac{5}{4} \end{cases}$$

2) Estudar o sinal da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.
 $\quad \quad \quad x \quad \quad \quad \mapsto \quad f(x) = y = -4x + 5$

Solução:

$$f(x)=0 \Rightarrow -4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}.$$

Como $a = -4 < 0$, a função é decrescente e:



Assim,

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } x < \frac{5}{4} \\ f(x) = 0 & \text{se } x = \frac{5}{4} \\ f(x) < 0 & \text{se } x > \frac{5}{4} \end{cases}$$

3) Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é negativa?
 $f(x) = y = 7x + 5$

Solução:

$$f(x) < 0 \Rightarrow 7x + 5 < 0 \Rightarrow x < -\frac{5}{7}$$

5.15 Equação de uma reta

Toda reta está associada a uma equação da forma $ax + by + c = 0$, chamada *equação geral da reta*, onde a , b e c são números reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e (x, y) representa um ponto genérico da reta.

Podemos determinar a equação de uma reta a partir de algumas situações. Vejamos:

a) *Dois pontos* – a equação da reta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dada por:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ou} \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Exemplo:

Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(4; 3)$ e $(-3; 2)$.

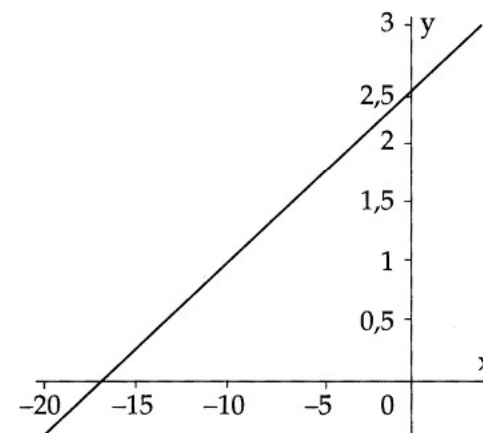
$$(x_1; y_1) = (4; 3) \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } y_1 = 3$$

$$(x_2; y_2) = (-3; 2) \Rightarrow x_2 = -3 \text{ e } y_2 = 2$$

$$\frac{y - 3}{x - 4} = \frac{2 - 3}{-3 - 4} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 4} = \frac{1}{7} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{7} \cdot (x - 4) \Rightarrow y = \frac{x}{7} + \frac{17}{7}$$

O coeficiente angular (ou declividade) é $\frac{1}{7}$.

(i) gráfico é apresentado na figura a seguir:



b) *Um ponto e o coeficiente angular* – a equação da reta, que passa por um ponto $(x_1; y_1)$ e tem coeficiente angular m , é dada por:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

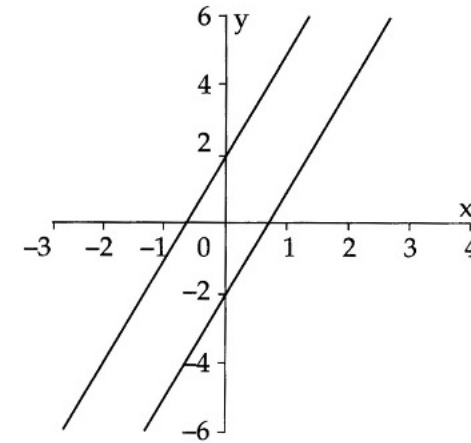
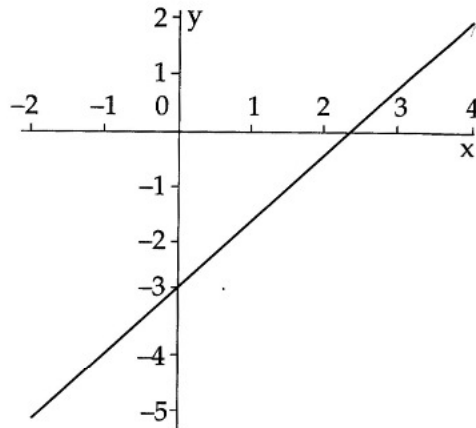
Exemplo:

Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(4; 2)$ e tem coeficiente angular $m = \frac{6}{5}$.

$$(x_1; y_1) = (4; 2) \Rightarrow x_1 = 4 \text{ e } y_1 = 2 \text{ e } m = \frac{6}{5}$$

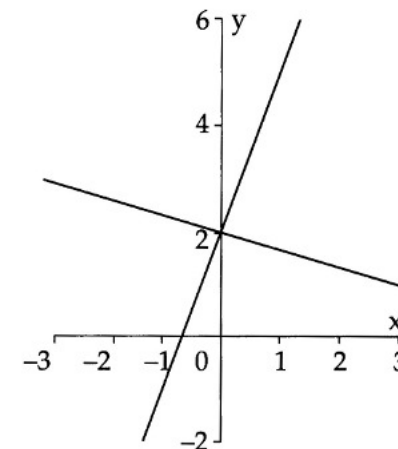
$$y - 2 = \frac{6}{5} \cdot (x - 4) \Rightarrow y = \frac{6x}{5} - \frac{14}{5}$$

O gráfico é apresentado na figura a seguir:



- 2) As retas $y_1 = 3x + 2$ e $y_2 = -\frac{1}{3}x + 2$ são perpendiculares (os coeficientes angulares são 3 e $-\frac{1}{3}$).

Veja o gráfico a seguir:



5.16 Retas paralelas e perpendiculares

Dadas as retas $y_1 = m_1x + b_1$ e $y_2 = m_2x + b_2$, teremos as seguintes definições:

Definição 1: Duas retas, não verticais, são *paralelas* se, e somente se, elas têm o mesmo coeficiente angular, isto é, $m_1 = m_2$.

Definição 2: Duas retas, não verticais, são *perpendiculares* se, e somente se, seus coeficientes angulares são simétricos e inversos, isto é, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Exemplos:

- 1) As retas $y_1 = 3x + 2$ e $y_2 = 3x - 2$ são paralelas (o coeficiente angular das duas é 3).

Veja o gráfico a seguir:

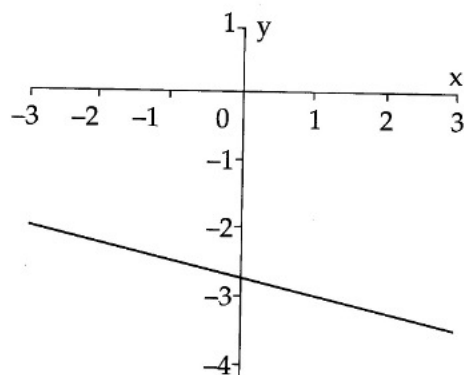
- 3) Determinar a equação da reta, perpendicular à reta $y = 4x + 5$, que passa pelo ponto $(1; -3)$.

O coeficiente angular da reta dada é $m_1 = 4$. Logo, o coeficiente angular da reta perpendicular à reta dada é $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{4}$.

A equação da reta, que passa por um ponto $(x_1; y_1) = (1; -3)$ e tem coeficiente angular $m = -\frac{1}{4}$ dado, é:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1) \Rightarrow y + 3 = -\frac{1}{4} \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{4}.$$

Veja o gráfico a seguir:



5.17 Interseção entre duas retas

A interseção entre duas retas é o ponto onde as retas se interceptam, se houver tal ponto.

Exemplo:

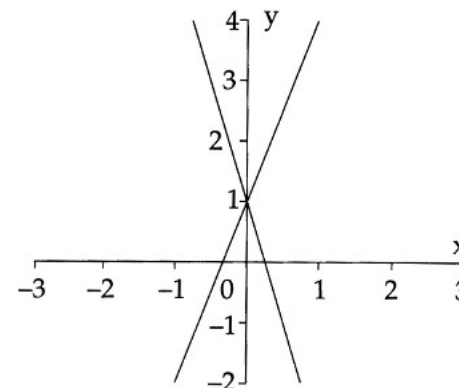
Dadas as retas $y_1 = 3x + 1$ e $y_2 = -4x + 1$, a interseção entre elas é o ponto do plano onde $y_1 = y_2$, ou seja:

$$3x + 1 = -4x + 1 \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$$

pode-se substituir em qualquer das equações, já que o ponto é a interseção de ambas).

Daí, o ponto $(0; 1)$ é a interseção das duas retas.

Veja o gráfico a seguir:



5.18 Exercícios resolvidos

- 1) Determine a equação da reta que passa por dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ dados, o coeficiente angular (ou declividade) da reta, trace o gráfico e determine o domínio e a imagem:

- $(x_1, y_1) = (-3; -5)$ e $(x_2, y_2) = (-1; 1)$
- $(x_1, y_1) = (0; 3)$ e $(x_2, y_2) = (-1; 5)$
- $(x_1, y_1) = (-3; -1)$ e $(x_2, y_2) = (2; 3)$
- $(x_1, y_1) = (0; 0)$ e $(x_2, y_2) = (-1; -2)$
- $(x_1, y_1) = (-3; -2)$ e $(x_2, y_2) = (-1; 1)$

Solução:

- a) Como $(x_1, y_1) = (-3; -5)$, tem-se que $x_1 = -3$ e $y_1 = -5$.

Como $(x_2, y_2) = (-1; 1)$, tem-se que $x_2 = -1$ e $y_2 = 1$.

A fórmula a ser utilizada é $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Daí, substituindo-se os valores de x_1, x_2, y_1 e y_2 nessa fórmula, e fazendo-se as operações devidas, temos que:

$$\frac{y + 5}{x + 3} = \frac{1 + 5}{-1 + 3} \Rightarrow \frac{y + 5}{x + 3} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y + 5 = 3 \cdot (x + 3) \Rightarrow y = 3x + 4$$

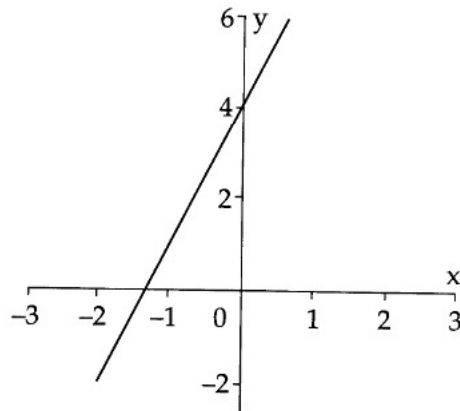
O coeficiente angular é 3. Daí, a reta é crescente.

Para traçar o gráfico:

x	f(x) = y = 3x + 4
0	4
$-\frac{4}{3}$	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$) (x_1, y_1) = (0; 3) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 3$$

$$(x_2, y_2) = (-1; 5) \Rightarrow x_2 = -1 \text{ e } y_2 = 5$$

$$\frac{y-3}{x-0} = \frac{5-3}{-1-0} \Rightarrow \frac{y-3}{x} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow y-3 = -2x \Rightarrow y = -2x+3$$

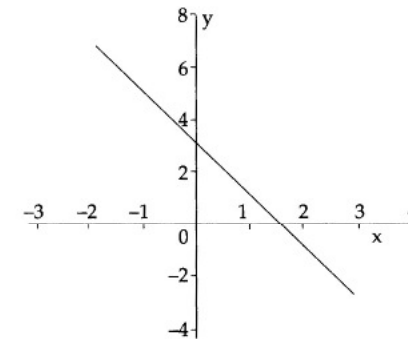
O coeficiente angular é $(-2) \Rightarrow$ a reta é decrescente.

Para traçar o gráfico:

x	f(x) = y = -2x + 3
0	3
$\frac{3}{2}$	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$c) (x_1, y_1) = (-3; -1) \Rightarrow x_1 = -3 \text{ e } y_1 = -1$$

$$(x_2, y_2) = (2; 3) \Rightarrow x_2 = 2 \text{ e } y_2 = 3$$

$$\frac{y+1}{x+3} = \frac{3+1}{2+3} \Rightarrow \frac{y+1}{x+3} = \frac{4}{5} \Rightarrow y+1 = \frac{4}{5} \cdot (x+3) \Rightarrow y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$$

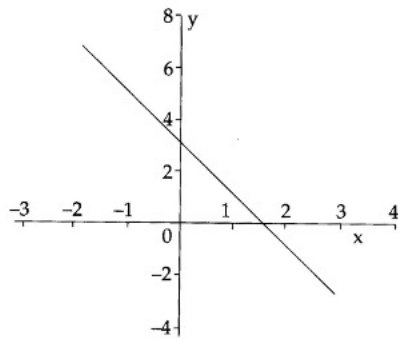
O coeficiente angular é $\frac{4}{5} \Rightarrow$ a reta é crescente.

Para traçar o gráfico:

x	f(x) = y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}
0	$\frac{7}{5}$
$-\frac{7}{4}$	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$d) (x_1, y_1) = (0; 0) \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } y_1 = 0$$

$$(x_2, y_2) = (-1; -2) \Rightarrow x_2 = -1 \text{ e } y_2 = -2$$

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{-2-0}{-1-0} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow y = 2x$$

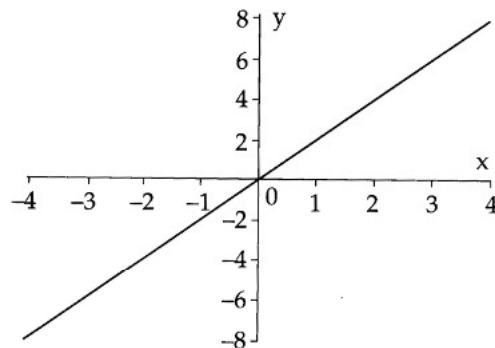
O coeficiente angular é 2 $\Rightarrow$ a reta é crescente.

Para traçar o gráfico:

x	f(x) = y = 2x
0	0
1	2

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$c) (x_1, y_1) = (-3; -2) \Rightarrow x_1 = -3 \text{ e } y_1 = -2$$

$$(x_2, y_2) = (-1; 1) \Rightarrow x_2 = -1 \text{ e } y_2 = 1$$

$$\frac{y+2}{x+3} = \frac{1+2}{-1+3} \Rightarrow \frac{y+2}{x+3} = \frac{3}{2} \Rightarrow y+2 = \frac{3}{2} \cdot (x+3) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

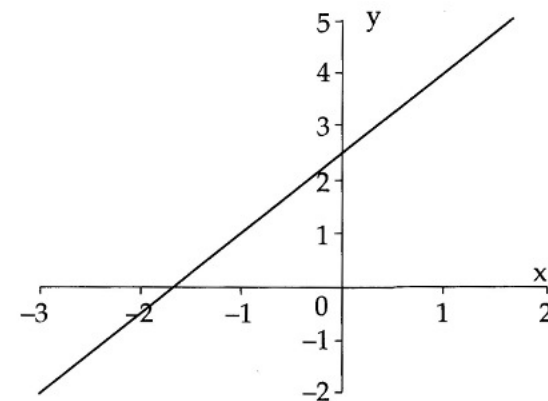
O coeficiente angular é $\frac{3}{2} \Rightarrow$ a reta é crescente.

Para traçar o gráfico:

x	f(x) = y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}
0	\frac{5}{2}
-\frac{5}{3}	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



2) Determine a equação da reta, dado o coeficiente angular (ou declividade) m passando pelo ponto $(x_1; y_1)$, trace o gráfico e determine o domínio e a imagem:

a) $m = -\frac{1}{5}$ e $(x_1; y_1) = (2; -4)$

b) $m = 5$ e $(x_1; y_1) = (0; 0)$

c) $m = 0$ e $(x_1; y_1) = (4; -5)$

d) $m = 3$ e $(x_1; y_1) = (-3; -2)$

e) $m = \frac{3}{4}$ e $(x_1; y_1) = (2; 1)$

Solução:

a) $m = -\frac{1}{5}$ e $(x_1; y_1) = (2; -4)$

A fórmula a ser utilizada é $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$.

Substituindo-se os valores de m , x_1 e y_1 , tem-se:

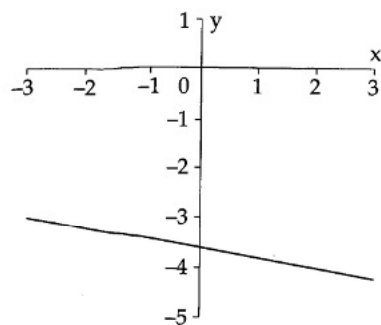
$$y + 4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x - \frac{18}{5}$$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x) = y = -\frac{1}{5}x - \frac{18}{5}$
0	$-\frac{18}{5}$
-18	0

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:



b) $m = 5$ e $(x_1; y_1) = (0; 0)$

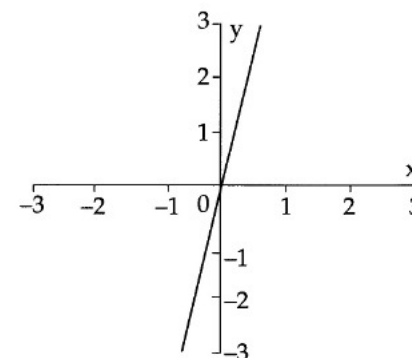
$$y - 0 = 5 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = 5x$$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x) = y = 5x$
0	0
1	5

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:

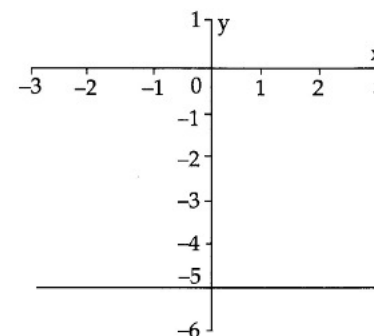


c) $m = 0$ e $(x_1; y_1) = (4; -5)$

$$y + 5 = 0 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = -5$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{-5\}$

Gráfico:



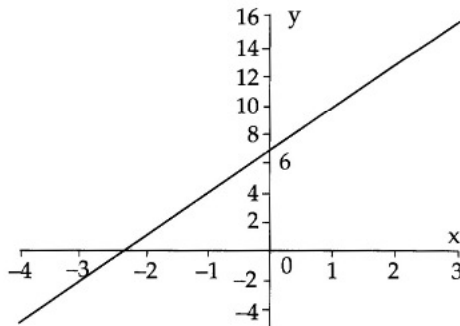
d) $m=3$ e $(x_1; y_1)=(-3; -2)$
 $y+2=3 \cdot (x+3) \Rightarrow y=3x+7$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x)=y=3x+7$
0	7
$-\frac{7}{3}$	0

$D(f)=\mathbb{R}$ e $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$.

Gráfico:



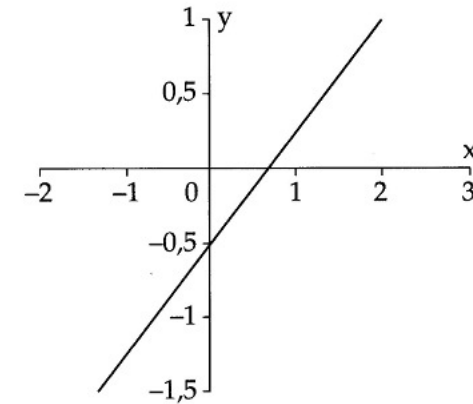
e) $m=\frac{3}{4}$ e $(x_1; y_1)=(2; 1)$
 $y-1=\frac{3}{4} \cdot (x-2) \Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x)=y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$
0	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	0

$D(f)=\mathbb{R}$ e $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$.

Gráfico:



3) Determine a equação da reta perpendicular à reta dada, que passa pelo ponto $(x; y)$. Encontre o domínio e a imagem e esboce o gráfico das retas:

- a) $x-y-7=0; (x; y)=(-2; -3)$
- b) $3x+y-4=0; (x; y)=(0; -5)$
- c) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-1=0; (x; y)=(2; 3)$
- d) $-3x+5y-1=0; (x; y)=(1; 1)$
- e) $\frac{x}{4}-\frac{y}{5}+\frac{1}{3}=0; (x; y)=(2; 1)$

Solução:

a) $x-y-7=0 \Rightarrow -y=-x+7 \Rightarrow y=x-7$
 $m_1=1 \Rightarrow m_2=-\frac{1}{m_1}=-1$

Como a reta passa pelo ponto $(-2; -3)$ e seu coeficiente angular é (-1) , a equação pedida é:

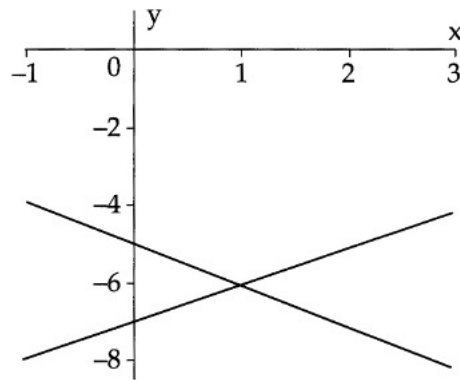
$y+3=(-1) \cdot (x+2) \Rightarrow y=-x-5$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x) = y = -x - 5$	x	$f(x) = y = x - 7$
0	-5	0	-7
-5	0	7	0

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:



$$b) 3x + y - 4 = 0 \Rightarrow y = -3x + 4$$

$$m_1 = -3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{1}{3}$$

Como a reta passa pelo ponto $(0; -5)$ e seu coeficiente angular é $\frac{1}{3}$, a equação pedida é:

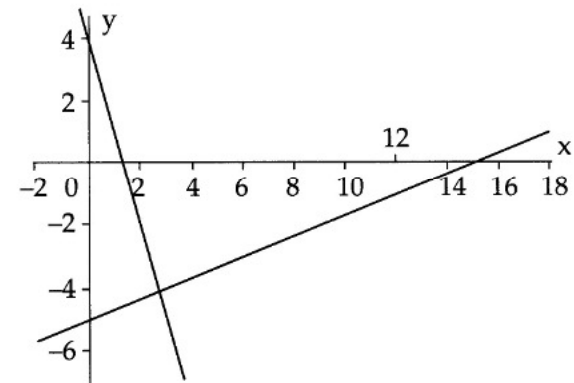
$$y + 5 = \frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 5$$

Para traçar o gráfico:

x	$f(x) = y = \frac{1}{3}x - 5$	x	$f(x) = y = -3x + 4$
0	-5	0	4
15	0	$\frac{4}{3}$	0

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:



$$c) \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{y}{3} = -\frac{x}{2} + 1 \Rightarrow y = -\frac{3x}{2} + 3$$

$$m_1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{2}{3}$$

Como a reta passa pelo ponto $(2; 3)$ e seu coeficiente angular é $\frac{2}{3}$, a equação pedida é:

$$y - 3 = \frac{2}{3} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$$

Para traçar o gráfico:

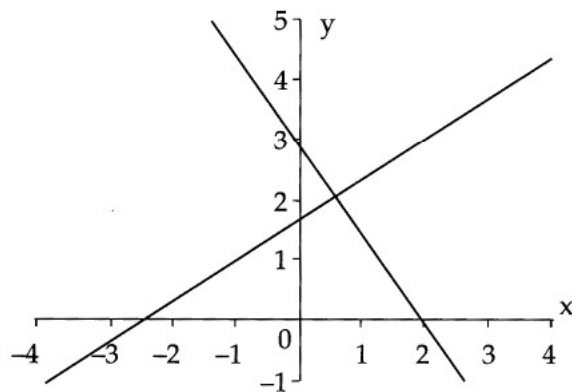
x	$f(x) = y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$
0	$\frac{5}{3}$
$-\frac{5}{2}$	0

 $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

x	$f(x) = y = -\frac{3x}{2} + 3$
0	3
2	0

 $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:



$$d) -3x + 5y - 1 = 0 \Rightarrow 5y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{3x}{5} + \frac{1}{5}$$

$$m_1 = \frac{3}{5} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{5}{3}$$

Como a reta passa pelo ponto $(x; y) = (1; 1)$ e seu coeficiente angular é $\left(-\frac{5}{3}\right)$, a equação pedida é:

$$y - 1 = \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -\frac{5x}{3} + \frac{8}{3}$$

Para traçar o gráfico:

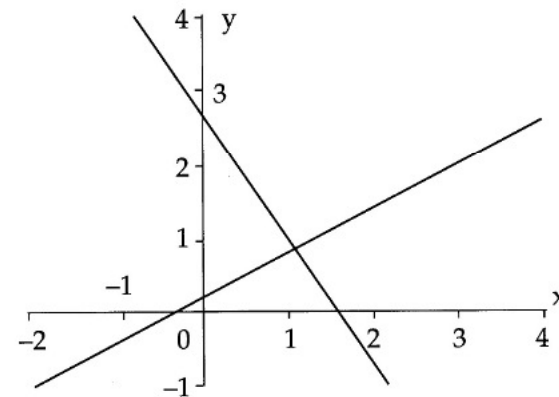
x	$f(x) = y = -\frac{5x}{3} + \frac{8}{3}$
0	$\frac{8}{3}$
$\frac{8}{5}$	0

 $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

x	$f(x) = y = \frac{3x}{5} + \frac{1}{5}$
0	$\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{3}$	0

 $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Gráfico:



$$e) \frac{x}{4} - \frac{y}{5} + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{y}{5} = -\frac{x}{4} - \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{5x}{4} + \frac{5}{3}$$

$$m_1 = \frac{5}{4} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{4}{5}$$

Como a reta passa pelo ponto $(2; 1)$ e seu coeficiente angular é $\left(-\frac{4}{5}\right)$,

a equação pedida é:

$$y - 1 = \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -\frac{4x}{5} + \frac{13}{5}$$

Para traçar o gráfico:

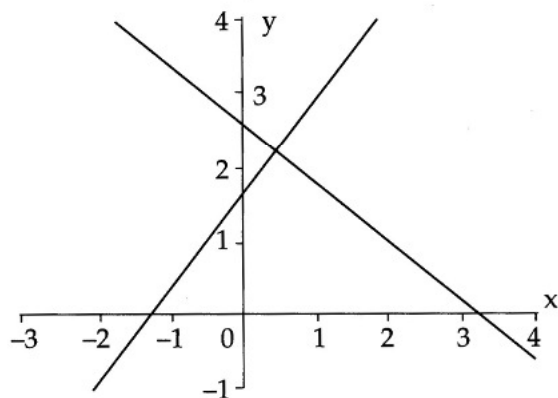
x	$f(x) = y = -\frac{4x}{5} + \frac{13}{5}$
0	$\frac{13}{5}$
$\frac{13}{4}$	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

x	$f(x) = y = \frac{5x}{4} + \frac{5}{3}$
0	$\frac{5}{3}$
$-\frac{4}{3}$	0

$$\mathrm{D}(f) = \mathbb{R} \text{ e } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Gráfico:



5.19 Exercícios propostos

- 1) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:
- a) $f(x) = y = -\frac{4}{7}$
 - b) $f(x) = y = 9$
 - c) $f(x) = y = \pi$
- 2) Sejam $f(x) = 3$ e $g(x) = -2$. Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfazem $g(x) < y \leq f(x)$ (ou $-2 < y \leq 3$).

- 3) Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfazem $-1 \leq y < 2$.
- 4) Sejam $f(x) = 3$ e $g(x) = x$. Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfazem $g(x) \leq f(x)$.
- 5) Sejam $f(x) = -4$, $g(x) = 3$ e $h(x) = x$. Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfazem $f(x) \leq h(x) < g(x)$.
- 6) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto} B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:
 - a) $f(x) = y = \frac{x}{3}$
 - b) $f(x) = y = -\frac{x}{3}$
- 7) Sejam $f(x) = -4$, $g(x) = 3$ e $h(x) = -2x$. Representar no plano cartesiano os pontos (x, y) que satisfazem $f(x) \leq h(x) < g(x)$.
- 8) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto} B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$. Determine o domínio, imagem e esboce o gráfico da função, sendo:
 - a) $f(x) = y = 3x - 1$
 - c) $f(x) = y = -3x + 1$
 - b) $f(x) = y = 3x + 1$
 - d) $f(x) = y = -3x - 1$
- 9) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto} B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = 5x - 6$, determine:
 - a) $f(0)$
 - e) $f(3x - 4)$
 - b) $f\left(-\frac{3}{5}\right)$
 - f) O ponto $(x; 0)$
 - c) $f(\sqrt{2})$
 - g) O ponto $(x; 1)$
 - d) $f(x + 7)$
- 10) Seja $f(3x - 4) = 2x + 7$. Determine:
 - a) $f(0)$
 - c) $f(x)$
 - b) $f(-16)$
 - d) $f(5x + 1)$

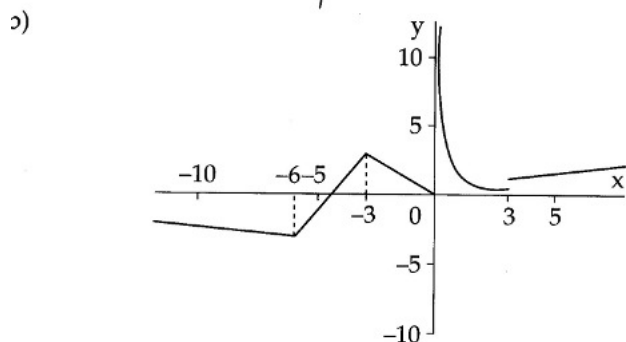
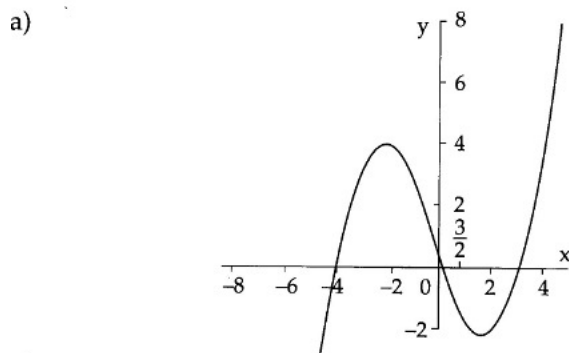
11) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $(-1; 3)$ e tem coeficiente angular igual a (-5) .

12) Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $\left(-\frac{3}{8}; -1\right)$ e tem coeficiente linear igual a $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

13) Calcule o zero da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $f(x) = y = \frac{x}{3} + 1$.

14) Determinar o ponto $(x; y)$ em que o gráfico da função
 $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ corta o eixo x .
 $f(x) = y = -\frac{2x}{9} + \frac{3}{7}$

15) Dados os gráficos a seguir, das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $f(x) = y$, determinar os intervalos onde as funções são crescentes e onde são decrescentes:



16) Determine se as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ a seguir são crescentes ou decrescentes:
 $f(x) = y = ax + b$

a) $f(x) = 3x - 1$

c) $f(x) = -7x$

b) $f(x) = 1 - 3x$

d) $f(x) = \frac{3x}{5}$

17) Determine p para que a função $f(x) = (5p - 7)x + 2p$ seja crescente.

18) Determine a equação da reta que passa por dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ dados, o coeficiente angular (ou declividade) da reta, esboce o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $(x_1; y_1) = (-3; 1); (x_2; y_2) = (4; 0)$

b) $(x_1; y_1) = (-2; 0); (x_2; y_2) = (-1; -3)$

c) $(x_1; y_1) = (2; 1); (x_2; y_2) = (-2; 0)$

d) $(x_1; y_1) = (-3; 1); (x_2; y_2) = (-1; 2)$

e) $(x_1; y_1) = (-5; -2); (x_2; y_2) = (-1; -1)$

19) Determine a equação da reta, dado o coeficiente angular (ou declividade) m , que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$, trace o gráfico, determine o domínio e a imagem:

a) $m = -3; (x_1; y_1) = (3; 2)$

b) $m = -4; (x_1; y_1) = (-5; 0)$

c) $m = 0; (x_1; y_1) = (2; -4)$

d) $m = -5; (x_1; y_1) = (2; -1)$

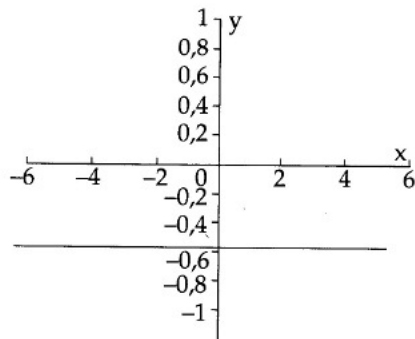
e) $m = -\frac{2}{5}; (x_1; y_1) = (2; -1)$

20) Determine a equação da reta perpendicular a reta dada, que passa pelo ponto $(x; y)$ dado, determine o domínio e a imagem e esboce o gráfico das retas:

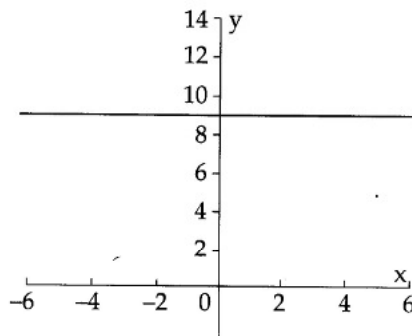
- a) $3x - y = 4; (x; y) = (-1; -2)$
 b) $x - 2y = 3; (x; y) = (0; -1)$
 c) $\frac{2x}{5} + \frac{3y}{4} - 2 = 0; (x; y) = (-1; 1)$
 d) $x + 3y - 1 = 0; (x; y) = (-2; 0)$
 e) $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 0; (x; y) = (0; 1)$

5.20 Respostas dos exercícios propostos

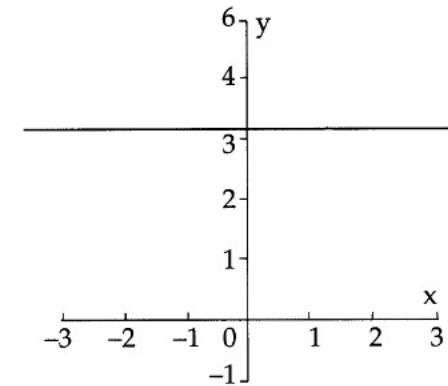
1) a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \left\{ -\frac{4}{7} \right\}$.



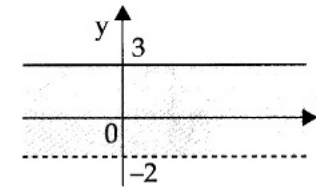
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{ 9 \}$.



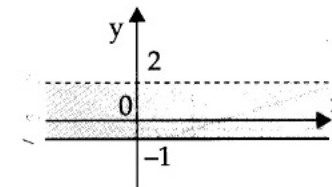
c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{ \pi \}$.



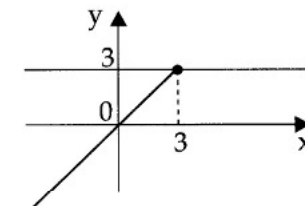
2)



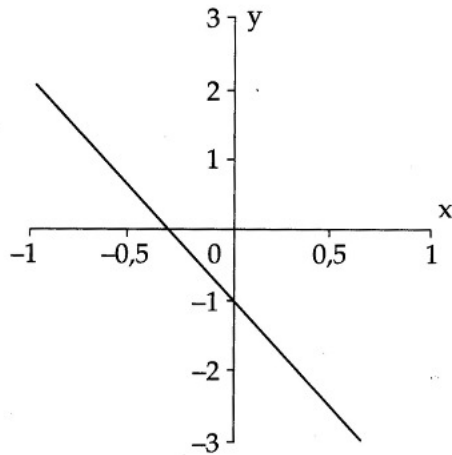
3)



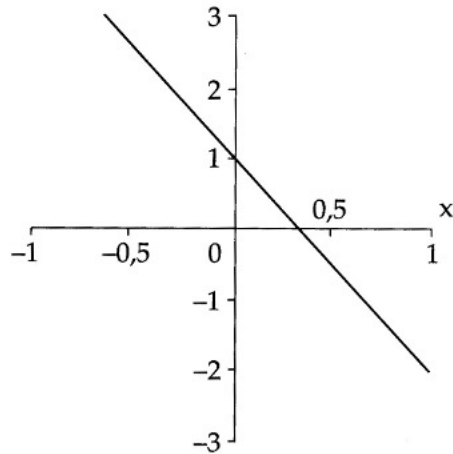
4)



c) $D(f) = \mathbb{R} = \text{Im}(f)$.



d) $D(f) = \mathbb{R} = \text{Im}(f)$.



- 9) a) -6
b) -9
c) $5\sqrt{2} - 6$
d) $5x + 29$

- e) $15x - 26$
f) $\left(\frac{6}{5}; 0\right)$
g) $\left(\frac{7}{5}; 1\right)$

10) a) $\frac{57}{8}$

b) -1

c) $\frac{2x+29}{3}$

d) $\frac{10x+89}{3}$

11) $y = -5x - 2$

12) $y = \frac{4x}{3} - \frac{1}{2}$

13) $x = -3$

14) $\left(\frac{27}{14}; 0\right)$

15) a) f é crescente em $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ e f é decrescente em $\left(-2; \frac{3}{2}\right)$.

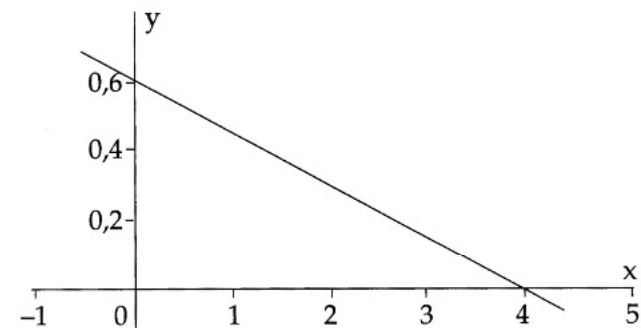
b) f é crescente em $(-6; -3) \cup (3; +\infty)$ e f é decrescente em $(-\infty; -6) \cup (-3; 0) \cup (0; 3)$.

- 16) a) crescente
b) decrescente

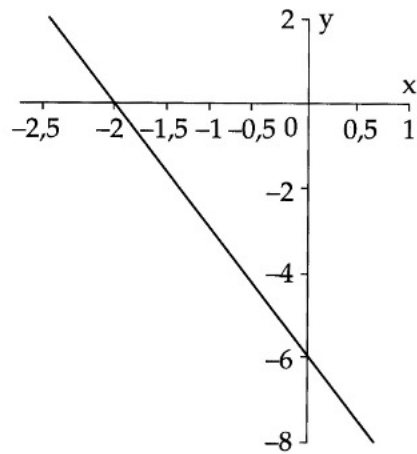
- c) decrescente
d) crescente

17) $p > \frac{7}{5}$

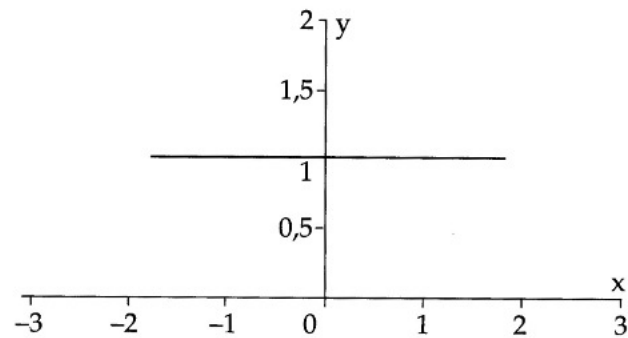
18) a) $f(x) = -\frac{x}{7} + \frac{4}{7}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



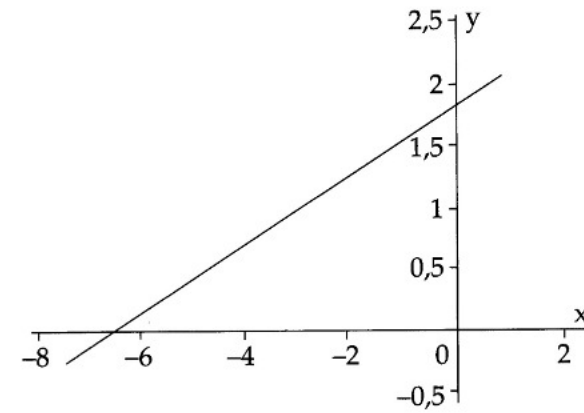
b) $f(x) = y = -3x - 6$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



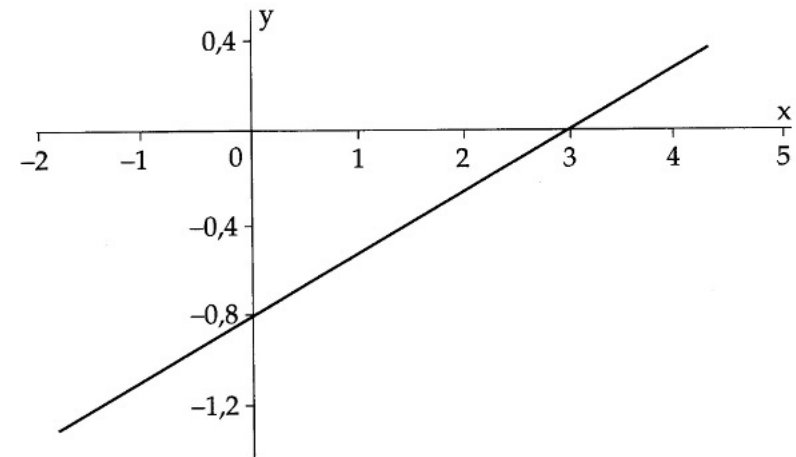
c) $f(x) = y = 1$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \{1\}$.



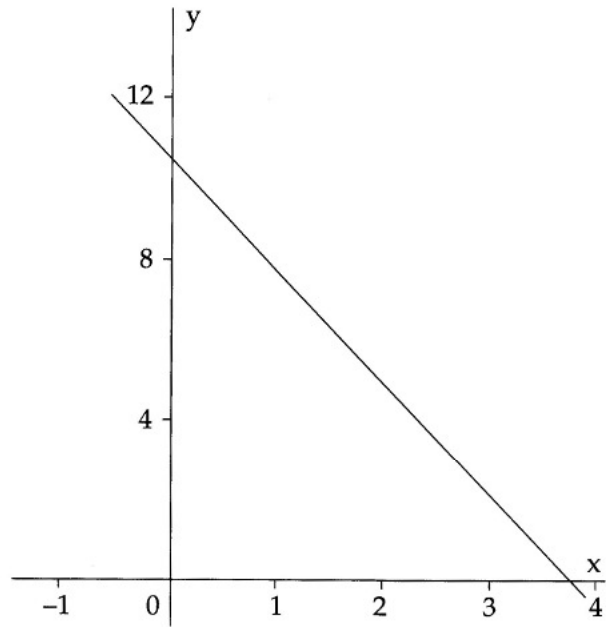
d) $f(x) = y = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



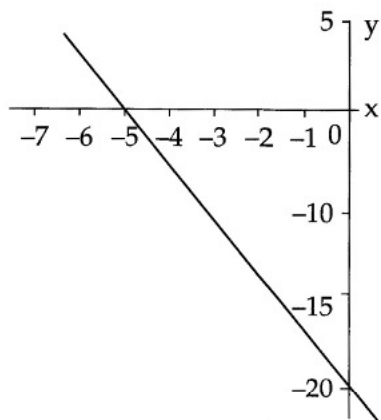
e) $f(x) = y = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



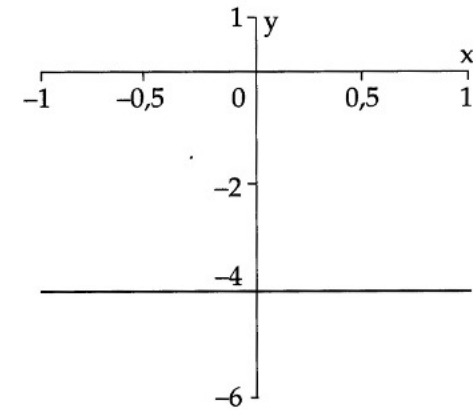
19) a) $f(x) = y = -3x + 11$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



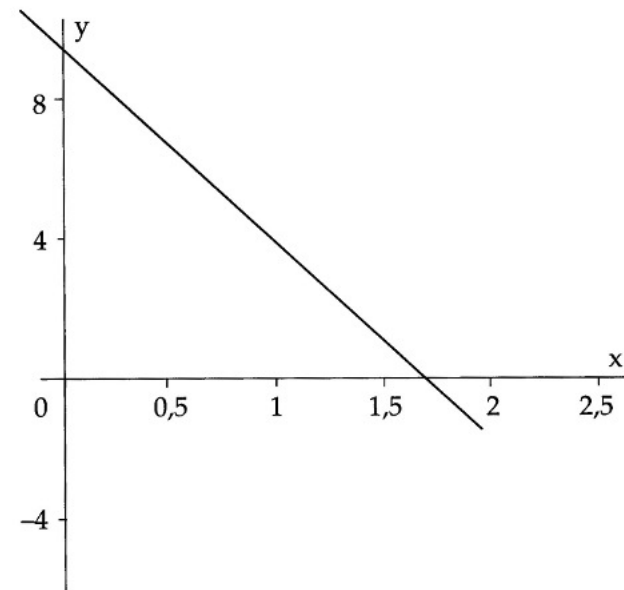
b) $f(x) = y = -4x - 20$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



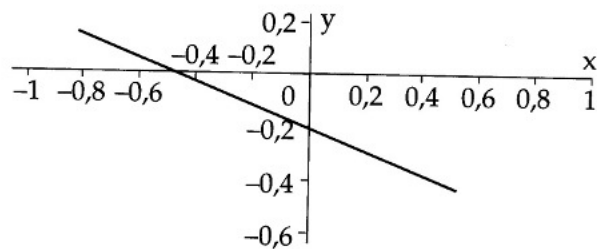
c) $f(x) = y = -4$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = \{-4\}$.



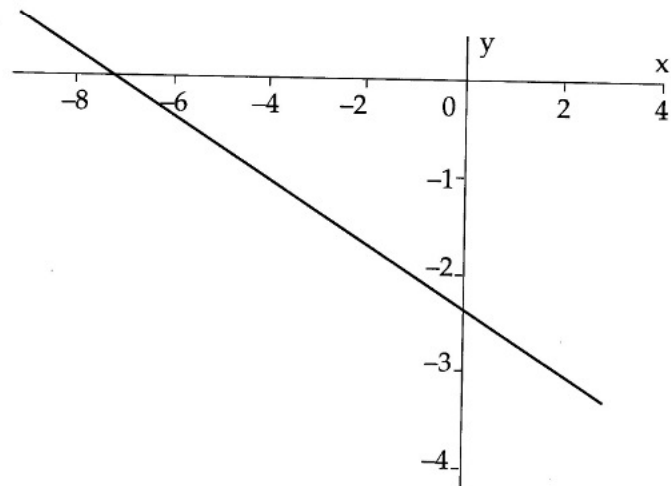
d) $f(x) = y = -5x + 9$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



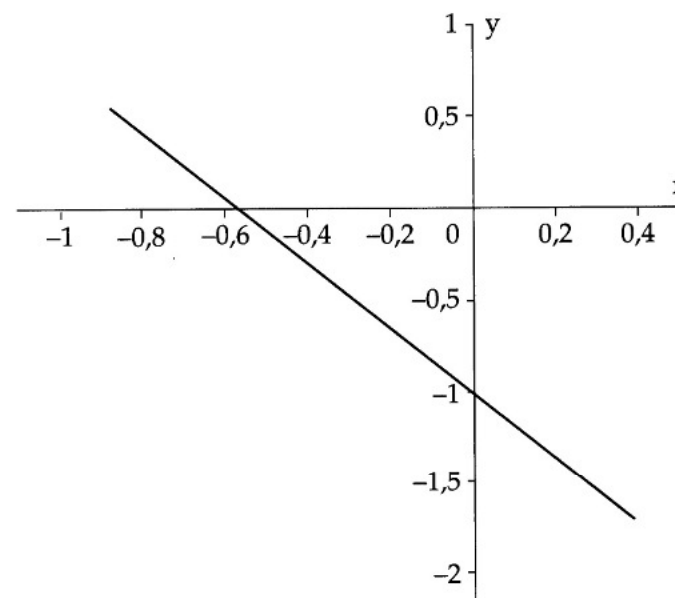
e) $f(x) = y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



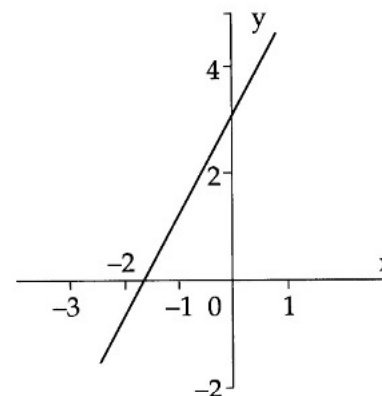
20) a) $f(x) = y = -\frac{x}{3} - \frac{7}{3}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



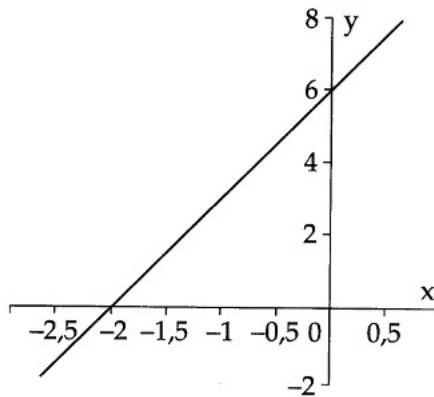
b) $f(x) = y = -2x - 1$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



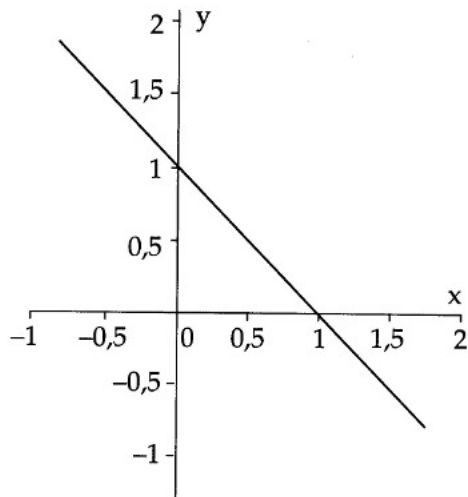
c) $f(x) = y = \frac{15}{8}x + \frac{23}{8}$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



d) $f(x) = y = 3x + 6$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



e) $f(x) = y = -x + 1$; $D(f) = \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



Relações quadráticas

Este capítulo habilita o aluno a identificar e desenvolver um trabalho com as circunferências, elipses, hipérboles e parábolas, a partir de uma equação chamada "Modelo Matemático Geral".

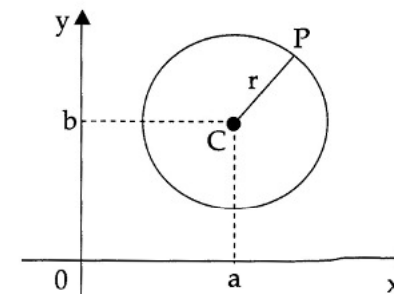
6.1 Definição

Uma *relação quadrática* é aquela que satisfaz a igualdade $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (equação 1) – denominada *modelo matemático geral* – onde A, B, C, D, E, F são constantes.

Dessa equação, originam-se os gráficos das seguintes curvas: circunferência, elipse, parábola e hipérbole, dependendo de certas condições iniciais, que estudaremos a seguir.

6.2 Circunferência

Definição: Dados um ponto C , pertencente a um plano, e uma distância r não nula, chama-se *circunferência* o conjunto dos pontos P , do plano, que estão à distância r do ponto C .

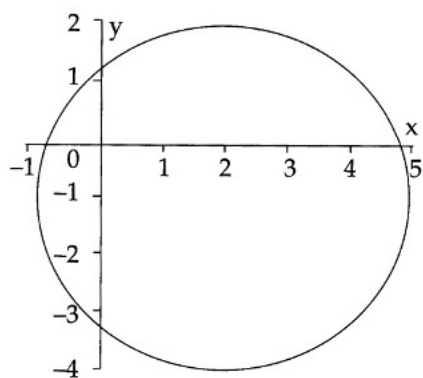


Seja a circunferência de centro em $C(a, b)$ e raio r . Um ponto $P(x, y)$ pertence à circunferência se, e somente se, $\overline{PC} = r$.

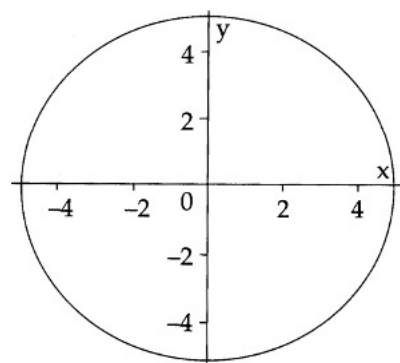
Dai, $\overline{PC} = r \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ (equação 2), que é chamada *equação reduzida* (ou forma canônica) da circunferência.

Exemplo:

A circunferência de centro $C(2, -1)$ e raio $r=3$ tem como equação $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$; a circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r=5$ tem como equação $x^2 + y^2 = 25$. Elas estão representadas nos gráficos a seguir.



$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$



$$x^2 + y^2 = 25$$

Reconhecimento:

Dado o *modelo matemático geral* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, quais as condições que as constantes devem obedecer para que representem uma circunferência? Quais as coordenadas do centro? Qual o raio?

Essas perguntas serão facilmente respondidas quando desenvolvermos a equação (2) e compararmos com a equação (1).

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x^2 - 2ax + a^2) + (y^2 - 2by + b^2) - r^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0 \quad (\text{equação 3}).$$

Comparando as duas equações, temos:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{B}{A} = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \frac{C}{A} = 1 \Rightarrow C = A \neq 0 \\ \frac{D}{A} = -2a \Rightarrow a = -\frac{D}{2A} \\ \frac{E}{A} = -2b \Rightarrow b = -\frac{E}{2A} \\ \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 \end{cases}$$

Como $\frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{F}{A} = a^2 + b^2 - r^2 &\Rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow r^2 = \left(-\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{F}{A} \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{F}{A} = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0 \quad (\text{pois o raio não pode ser zero}) \\ \Rightarrow &\boxed{D^2 + E^2 - 4AF > 0}. \end{aligned}$$

Assim, vamos responder às perguntas feitas:

- Condições: $C = A \neq 0$, $B = 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$
- $C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$
- $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|}$

Logo, o *modelo matemático* é $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $C = A \neq 0$ e $D^2 + E^2 - 4AF > 0$.

A circunferência não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

O domínio da relação é o intervalo $[a - r; a + r]$ e a imagem da relação é o conjunto $[b - r; b + r]$.

Exemplo:

Seja a equação $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 41 = 0$.

Para obter a forma canônica da circunferência, devem-se determinar dois produtos notáveis (um em x e outro em y):

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 4y) - 41 = 0 \Rightarrow (x^2 + 4x) + (y^2 - 4y) = 41.$$

Para se obter o quadrado perfeito em x , a partir do termo $(x^2 + 4x)$, deve-se somar uma constante. Essa constante está denominada por k_1^2 . Do mesmo modo, para se obter um quadrado perfeito em y , a partir do termo $(y^2 - 4y)$, deve-se somar uma constante. Essa constante está denominada por k_2^2 .

Para não alterar a igualdade matemática, adiciona-se essas constantes no lado direito da equação:

$$(x^2 + 4x + k_1^2) + (y^2 - 4y + k_2^2) = 41 + k_1^2 + k_2^2$$

Tem-se, então, que: $2k_1 = 4 \Rightarrow k_1 = 2$ e $2k_2 = -4 \Rightarrow k_2 = -2$.

Daí,

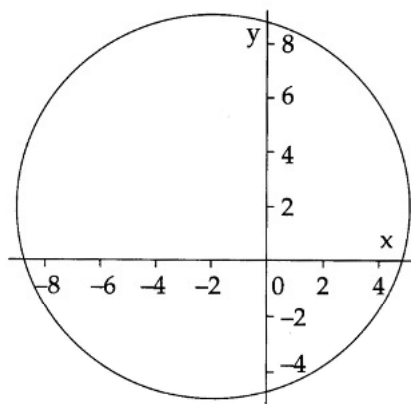
$$(x^2 + 4x + k_1^2) + (y^2 - 4y + k_2^2) = 41 + 2^2 + 2^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 49 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 49.$$

Comparando-se essa equação com a equação (2), $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, tem-se que $a = -2$, $b = 2$ e $r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$.

Logo, o centro da circunferência é o ponto $(-2, 2)$ e o raio é igual a 7.

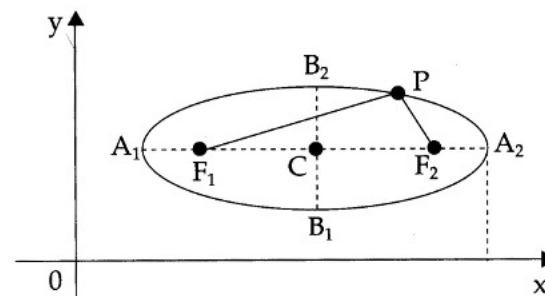
Graficamente:



O domínio da relação é o intervalo $[-9, 5]$ e a imagem é o intervalo $[-5, 9]$.

6.3 Elipse

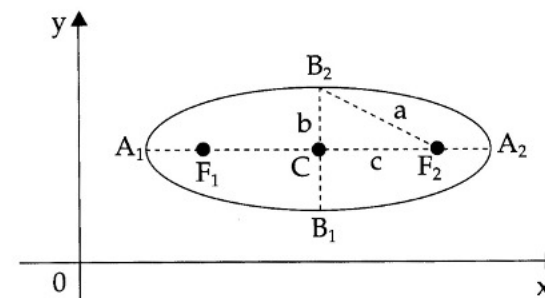
Definição: Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano, seja $2c$ a distância entre eles. *Elipse* é o conjunto dos pontos P , do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$.



$$\overline{F_1F_2} = 2c \text{ e } \overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a.$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{F_2A_2} = \overline{A_1F_1} + \overline{F_1F_2} + \overline{A_1F_1} = \overline{F_1A_1} + \overline{A_1F_2} = 2a$$

Sejam F_1 e F_2 os focos, C o centro, $A_1 A_2$ o eixo maior, $B_1 B_2$ o eixo menor, $2c$ a distância focal, $2a$ a medida do eixo maior, $2b$ a medida do eixo menor e $\frac{c}{a}$ a excentricidade.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Seja a elipse de centro em $C(0,0)$, $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$, $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$. Um ponto $P(x,y)$ pertence à elipse se, e somente se, $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a$.

$$\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2 \Rightarrow$$

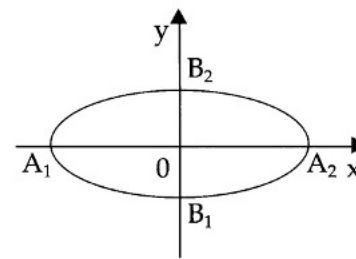
$$\Rightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow (a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2) \Rightarrow$$

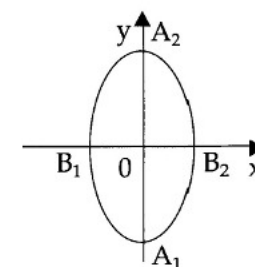
$\Rightarrow b^2 \cdot x^2 + a^2y^2 = a^2 \cdot b^2 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, que é chamada *equação reduzida* da elipse (ou equação na forma canônica).

Analogamente, se $C(0,0)$, $A_1(0,-a)$, $A_2(0,a)$, $B_1(-b,0)$, $B_2(b,0)$,

$F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, a equação reduzida da elipse será $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$.

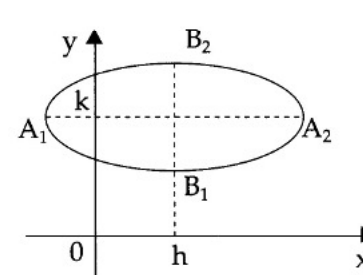


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

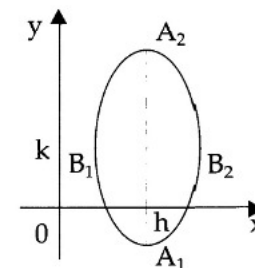


$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Se $C(h,k)$, teremos:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

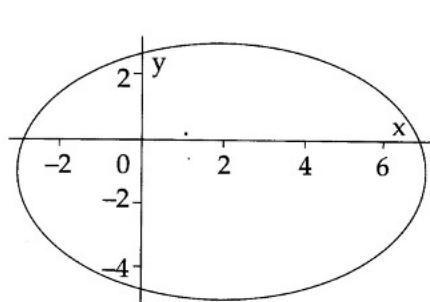


$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

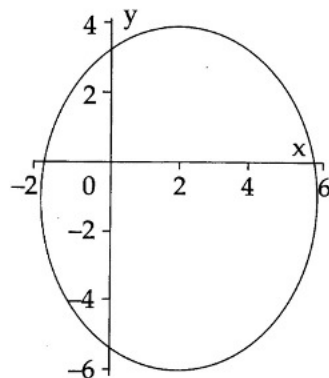
Exemplo:

A elipse de centro $C(2,-1)$, semi-eixo maior $a=5$ e semi-eixo menor $b=4$

apresenta as equações $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ e $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$.



$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$



$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

O modelo matemático é $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $A \neq C$, ou a curva é identificada em função de seus parâmetros por meio de $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde (h, k) é o centro e $2a$ e $2b$ são os eixos.

A elipse não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

O domínio da relação é o intervalo $[h-a; h+a]$ e a imagem é o conjunto $[k-b; k+b]$.

Exemplo:

Seja a relação $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 50 = 0$. Para se obter a forma reduzida, deve-se obter um produto notável em x e um produto notável em y . Logo,

$$(x^2 - 6x) + (4y^2 + 16y) = 50.$$

Como não existe produto notável que tenha uma constante multiplicando os termos quadráticos, coloca-se em evidência a constante 4 que está multiplicando o termo y^2 . Para não alterar a igualdade matemática, soma-se do lado direito da equação a constante $4k_2^2$.

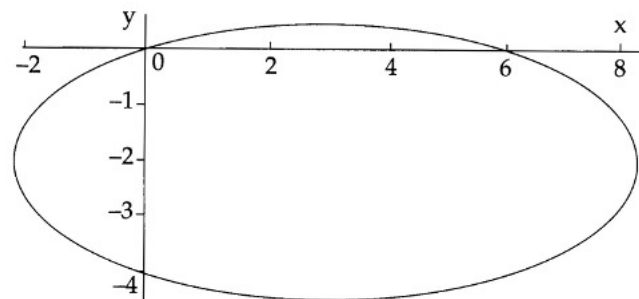
$$\Rightarrow (x^2 - 6x + k_1^2) + 4(y^2 + 4y + k_2^2) = 50 + k_1^2 + 4k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = -6 \Rightarrow k_1 = -3 \text{ e } 2k_2 = 4 \Rightarrow k_2 = 2.$$

$$\text{Logo, } (x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = 50 + 9 + 16 \Rightarrow$$

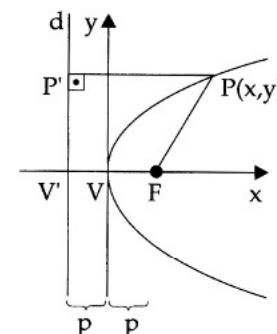
$$\Rightarrow (x-3)^2 + 4(y+2)^2 = 25 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{\frac{25}{4}} = 1, \text{ que é uma elipse de}$$

centro $(3, -2)$ e semi-eixos $a = 5$ e $b = \frac{5}{2}$. O domínio da relação é o intervalo $[-2, 8]$ e a imagem é o intervalo $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right]$. O gráfico é apresentado a seguir:



6.4 Parábola

Definição: Dados um ponto F e uma reta d , pertencentes a um plano, com $F \notin d$, seja $2p$ a distância entre F e d . *Parábola* é o conjunto dos pontos do plano que estão à mesma distância de F e de d .



$$\overline{PF} = \overline{PP'} \text{ e } \overline{VF} = \overline{VV'} = p.$$

Sejam F o foco, d a diretriz, p o parâmetro, V o vértice e a reta VF o eixo de simetria.

Tomemos a parábola anterior, onde $V(0, 0)$, $F(p, 0)$ e a equação da diretriz d , sendo $x = -p$.

$$\overline{PF} = \overline{PP'} \Rightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y^2 = 4px}, \text{ que é a equação reduzida (ou forma canônica) da parábola.}$$

Analogamente, se $V(0, 0)$ e $F(0, p)$, a equação reduzida da parábola será $x^2 = 4py$.

Se $V(h, k)$, as equações se tornam:

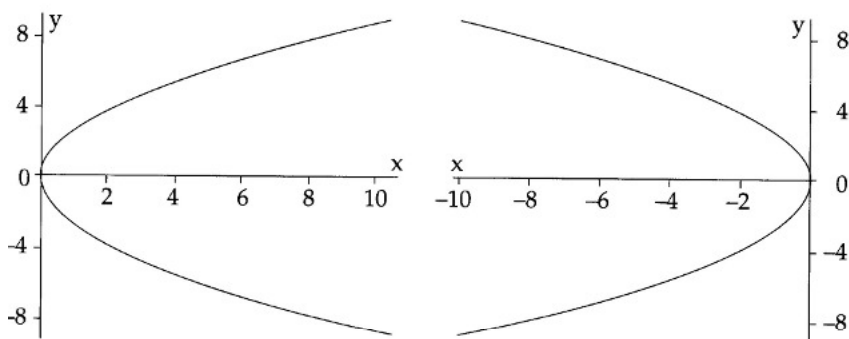
$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \text{ ou } (x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Exemplos:

- 1) A parábola com parâmetro $p=2$, vértice na origem e foco no eixo dos x , tem equação:

$$y^2 = 8x, \text{ se } F \text{ à direita de } V.$$

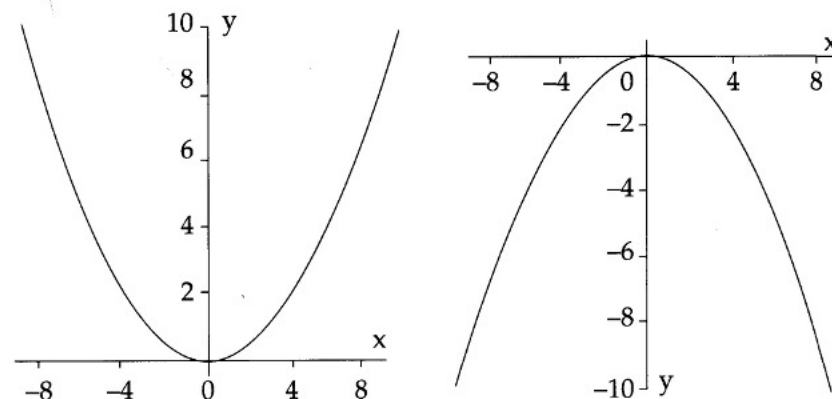
$$y^2 = -8x, \text{ se } F \text{ à esquerda de } V.$$



- 2) A parábola com parâmetro $p=2$, vértice na origem e foco no eixo dos y , tem equação:

$$x^2 = 8y, \text{ se } F \text{ acima de } V.$$

$$x^2 = -8y, \text{ se } F \text{ abaixo de } V.$$



O modelo matemático será:

1º caso: parábola com eixo transversal paralelo ao eixo x .

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow x = \frac{-Cy^2 - Ey - F}{D} \Rightarrow x = ay^2 + by + c$$

Nesse caso, o vértice é dado pelo par ordenado $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Ou a curva é identificada em função de seus parâmetros por meio de $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, onde (h, k) é o vértice e p a distância do foco ao vértice.

A parábola não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

Se $p > 0$, o domínio da relação é o intervalo $[h; +\infty)$ e a imagem, o conjunto $\mathbb{R}$. Se $p < 0$, o domínio da relação é o intervalo $(-\infty; h]$ e a imagem, o conjunto $\mathbb{R}$.

2º caso: parábola com eixo transversal paralelo ao eixo y .

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow y = \frac{-Ax^2 - Dx - F}{E} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c$$

Nesse caso, o vértice é dado pelo par ordenado $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Ou a curva é identificada em função de seus parâmetros por meio de $(x - h)^2 = 4p(y - k)$, onde (h, k) é o vértice e p a distância do foco ao vértice.

A parábola não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

Se $p > 0$, o domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem, o intervalo $[k; +\infty)$. Se

$p < 0$, o domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem, o intervalo $(-\infty; k]$.

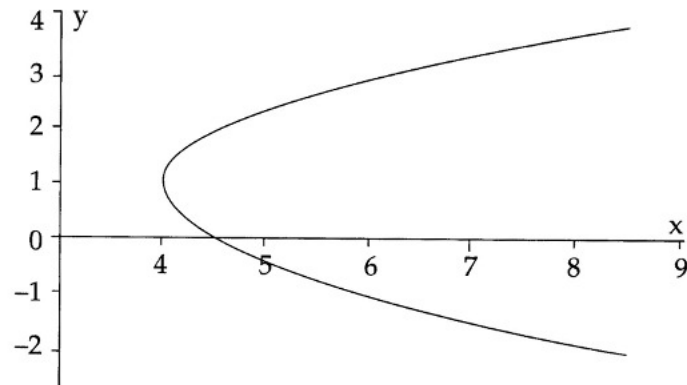
Exemplo:

Seja a equação $y^2 - 2x - 2y + 9 = 0$. Para se obter a forma reduzida, deve-se compor um quadrado perfeito em y , pois a equação tem um termo quadrático em y .

$$(y^2 - 2y) = 2x - 9 \Rightarrow (y^2 - 2y + k_1^2) = 2x - 9 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = -2 \Rightarrow k_1 = -1 \Rightarrow$$

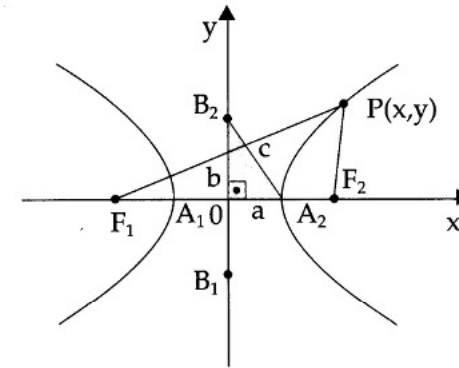
$$\Rightarrow (y^2 - 2y + 1) = 2x - 9 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 2(x - 4) \Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, \text{ que}$$

é uma parábola com vértice $(4, 1)$. O domínio da relação é o intervalo $[4, +\infty)$ e a imagem é $\mathbb{R}$. O gráfico é apresentado a seguir:



6.5 Hipérbole

Definição: Dados dois pontos distintos F_1 e F_2 , pertencentes a um plano, seja $2c$ a distância entre eles. *Hipérbole* é o conjunto dos pontos P , do plano, cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a F_1 e F_2 é a constante $2a$ ($0 < 2a < 2c$).



$$|PF_1 - PF_2| = 2a \text{ e } c^2 = a^2 + b^2.$$

Sejam F_1 e F_2 os focos, C o centro (nesse caso, $C = 0$), $A_1 A_2$ o eixo real ou transversal, $B_1 B_2$ o eixo imaginário, $2c$ a distância focal, $2a$ a medida do eixo real, $2b$ a medida do eixo imaginário e $\frac{c}{a}$ a excentricidade.

Tomemos a hipérbole anterior, onde $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

$$|PF_1 - PF_2| = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow (cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \text{ que é a equação reduzida (ou forma canônica) da hipérbole.}$$

Analogamente, se $F_1(0, -c)$ e $F_2(0, c)$, a equação reduzida da hipérbole será $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

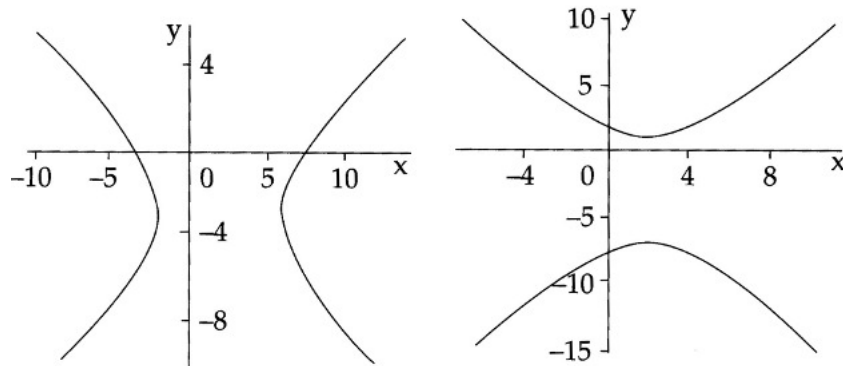
Se $C(h, k)$, as equações se tornam:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \text{ ou } \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Exemplo:

Uma hipérbole que tem centro $C(2, -3)$, semi-eixo real $a = 4$ e semi-eixo imaginário $b = 3$, tem a equação:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1, \text{ se } A_1A_2 \parallel x, \text{ ou } \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1, \text{ se } A_1A_2 \parallel y.$$



O modelo matemático será:

1º caso: hipérbole com eixo transversal paralelo ao eixo x .

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, A \text{ e } C \text{ simétricos.}$$

Ou a curva é identificada em função de seus parâmetros por meio de $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, onde: (h, k) é o centro e a , a distância do centro ao vértice.

A hipérbole não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

O domínio da relação é o intervalo $(-\infty; h-a] \cup [h+a; +\infty)$ e a imagem é $\mathbb{R}$.

A hipérbole tem duas assíntotas dadas por $\frac{y-k}{b} = \pm \frac{x-h}{a}$.

2º caso: hipérbole com eixo transversal paralelo ao eixo y .

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, A \text{ e } C \text{ simétricos.}$$

Ou a curva é identificada em função de seus parâmetros por meio de $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$, onde: (h, k) é o centro e a , a distância do centro ao vértice.

A hipérbole não vai existir se o modelo matemático não for satisfeito.

O domínio da relação é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $(-\infty; k-b] \cup [k+b; +\infty)$.

A hipérbole tem duas assíntotas dadas por $\frac{x-h}{a} = \pm \frac{y-k}{b}$.

Exemplo:

Seja a equação $3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$. Para se obter a forma canônica, deve-se formar um produto notável em x e outro em y .

$$(3x^2 - 6x) + (-2y^2 - 4y) = -2 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) - 2(y^2 + 2y) = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 2x + k_1^2) - 2(y^2 + 2y + k_2^2) = -2 + 3k_1^2 - 2k_2^2 \Rightarrow$$

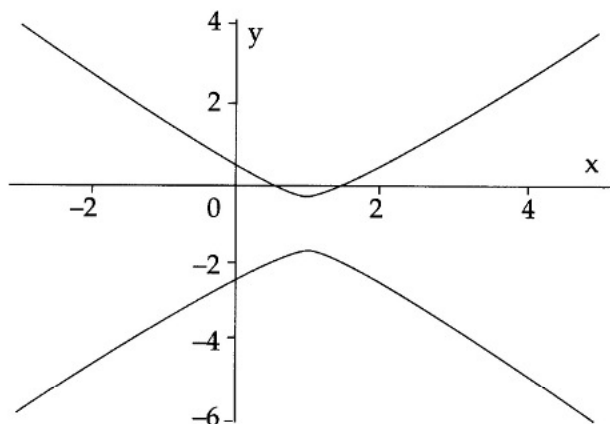
$$\Rightarrow 2k_1 = -2 \Rightarrow k_1 = -1 \text{ e } 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 2x + 1) - 2(y^2 + 2y + 1) = -2 + 3 - 2 \Rightarrow 3(x-1)^2 - 2(y+1)^2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y+1)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

O domínio da relação é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $\left(-\infty, -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.

O gráfico é apresentado a seguir:



6.5.1 Hipérbole eqüilátera

Definição: Uma hipérbole é denominada *eqüilátera* quando $a = b$. Suas equações canônicas são dadas por:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (x-h)^2 - (y-k)^2 = a^2$$

ou

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow (y-k)^2 - (x-h)^2 = a^2$$

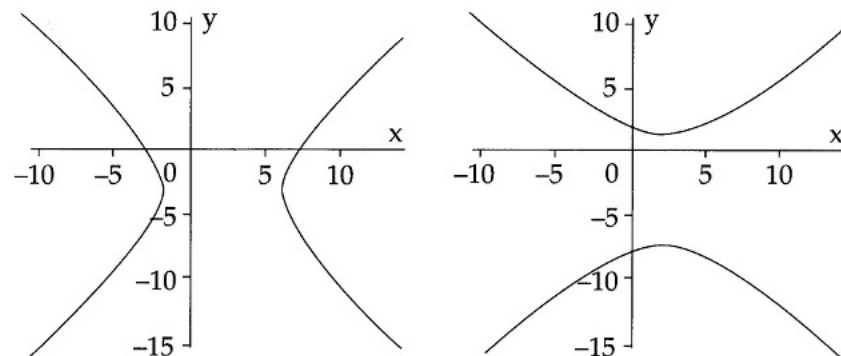
As assíntotas são perpendiculares entre si:

$$C(0, 0) \Rightarrow x = \pm y \quad \text{ou} \quad C(h, k) \Rightarrow (x-h) = \pm (y-k).$$

Exemplo:

Uma hipérbole eqüilátera com centro $C(2, -3)$, semi-eixo real $a = 4$ e semi-eixo imaginário $b = 4$, com assíntotas $(x-2) = \pm (y+3)$, tem a equação:

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1, \text{ se } A_1A_2 \parallel x, \text{ ou } \frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1, \text{ se } A_1A_2 \parallel y.$$



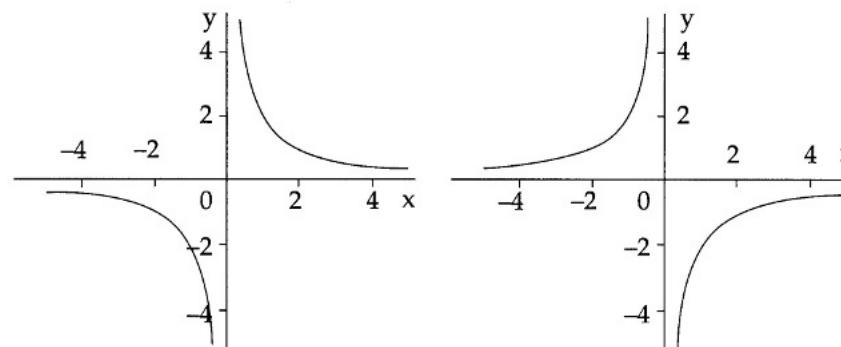
Caso Especial: As assíntotas são os eixos coordenados e o centro está na origem; sua forma canônica é $xy = c$.

Exemplo:

$$xy = 2 \quad (c > 0)$$

e

$$xy = -2 \quad (c < 0)$$

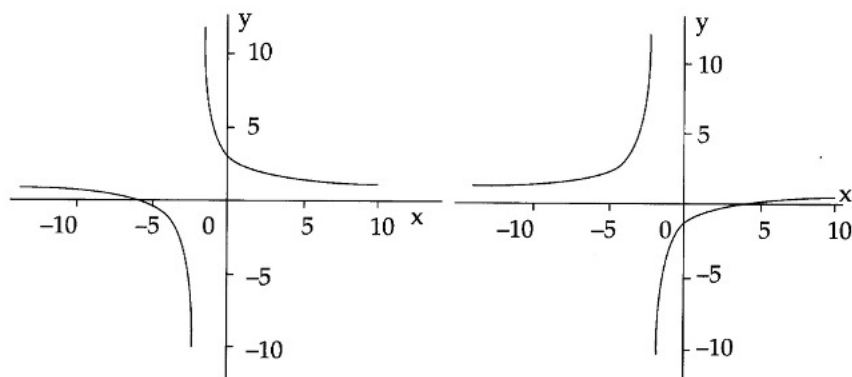


Se as assíntotas são paralelas aos eixos coordenados ($x = h$ e $y = k$) e

o centro é $C(h, k)$, sua forma canônica é $(x-h)(y-k) = c$.

Exemplo:

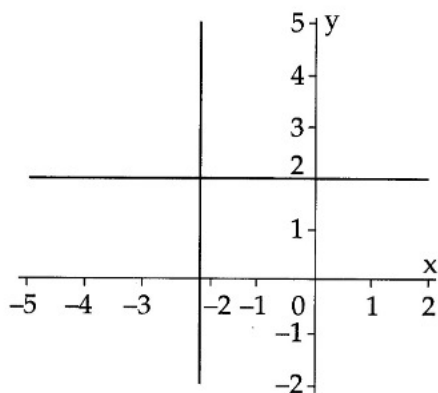
$$(x+2)(y-1)=4 \quad (c>0) \quad e \quad (x+2)(y-1)=-4 \quad (c<0)$$



Se $(x-h)(y-k)=0$, o lugar geométrico é formado por duas retas concorrentes, $x=h$ e $y=k$.

Exemplo:

$$(x+2)(y-2)=0$$



6.6 Exercícios resolvidos

Identifique o lugar geométrico, determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das equações:

$$1) \quad x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0$$

Solução:

Obtendo um produto notável em x e o outro em y ,

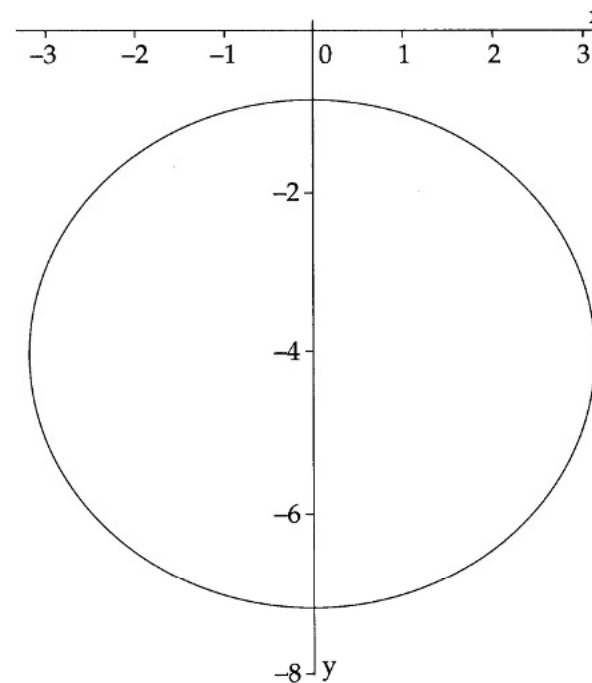
$$(y^2 + 8y) + (x^2) = -6 \Rightarrow (y^2 + 8y + k_1^2) + (x^2 + k_2^2) = -6 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = 8 \Rightarrow k_1 = 4 \text{ e } 2k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (y^2 + 8y + 16) + (x^2) = -6 + 16 \Rightarrow (y+4)^2 + (x^2) = 10$, que é a forma canônica de uma circunferência com centro $(0, -4)$ e raio $r = \sqrt{10}$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-\sqrt{10}; \sqrt{10}] \text{ e imagem: } [-4 - \sqrt{10}; -4 + \sqrt{10}].$$

Gráfico:



$$2) \ x^2 + y^2 - 12x + 2y + 27 = 0$$

Solução:

$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 2y) = -27 \Rightarrow$$

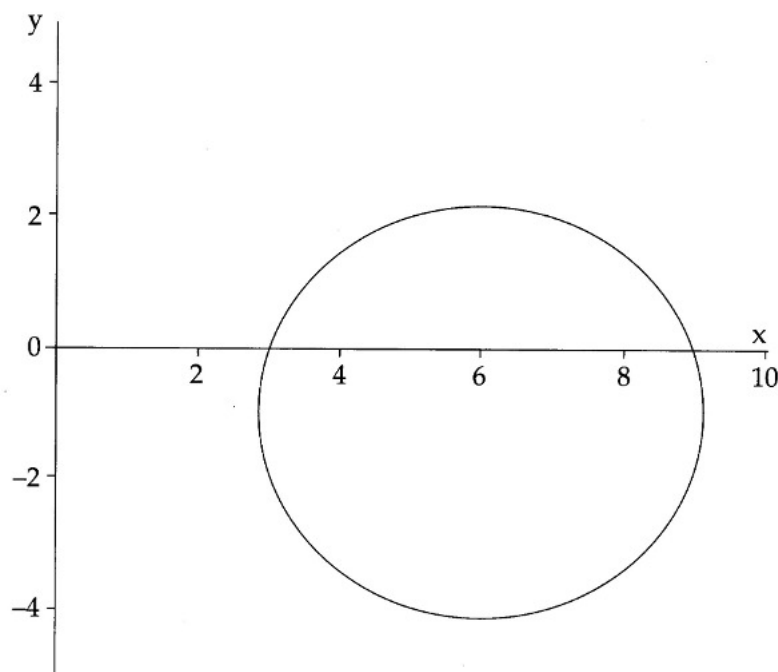
$$\Rightarrow (x^2 - 12x + k_1^2) + (y^2 + 2y + k_2^2) = -27 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = -12 \Rightarrow k_1 = -6 \text{ e } 2k_2 = 2 \Rightarrow k_2 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x^2 - 12x + 36) + (y^2 + 2y + 1) = -27 + 36 + 1 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 10$,
que é a forma canônica de uma circunferência com centro $(6, -1)$ e raio $r = \sqrt{10}$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [6 - \sqrt{10}; 6 + \sqrt{10}] \text{ e imagem: } [-1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10}].$$

Gráfico:



$$3) \ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 50 = 0$$

Solução:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = -50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + k_1^2) + (y^2 - 6y + k_2^2) = -50 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = -4 \Rightarrow k_1 = -2 \text{ e } 2k_2 = -6 \Rightarrow k_2 = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = -50 + 4 + 9 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -37,$$

logo, $r = \sqrt{-37}$, não existe a curva.

$$4) \ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

Solução:

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + k_1^2) + (y^2 + 6y + k_2^2) = 12 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

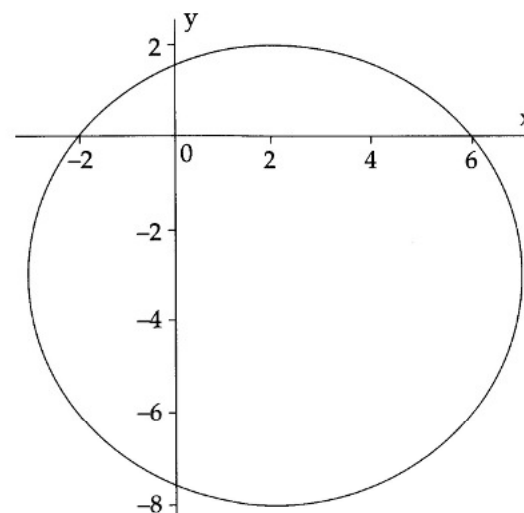
$$\Rightarrow 2k_1 = -4 \Rightarrow k_1 = -2 \text{ e } 2k_2 = 6 \Rightarrow k_2 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 12 + 4 + 9 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25, \text{ que é}$$

a forma canônica de uma circunferência com centro $(2, -3)$ e raio $r = 5$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-3; 7] \text{ e imagem: } [-8; 2].$$

Gráfico:



5) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$

Solução:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 10y) = 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6x + k_1^2) + (y^2 + 10y + k_2^2) = 15 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

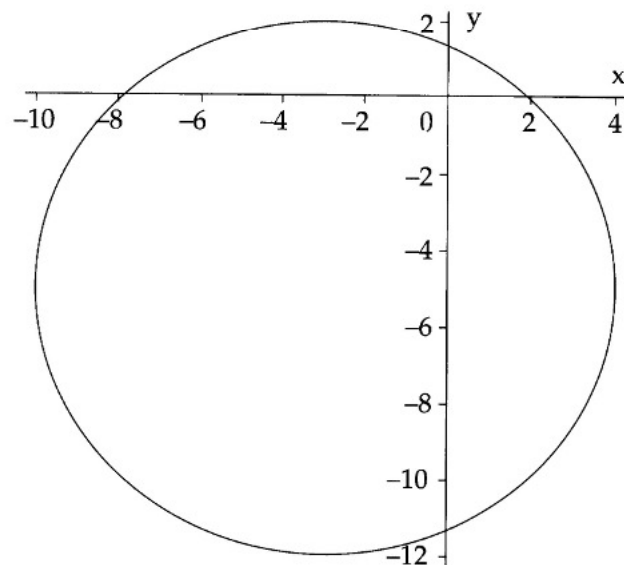
$$\Rightarrow 2k_1 = 6 \Rightarrow k_1 = 3 \text{ e } 2k_2 = 10 \Rightarrow k_2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = 15 + 9 + 25 \Rightarrow (x+3)^2 + (y+5)^2 = 49,$$

que é a forma canônica de uma circunferência com centro $(-3, -5)$ e raio $r = 7$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-10; 4] \text{ e imagem: } [-12; 2].$$

Gráfico:



6) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$

Solução:

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + k_1^2) + (y^2 - 2y + k_2^2) = 2 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

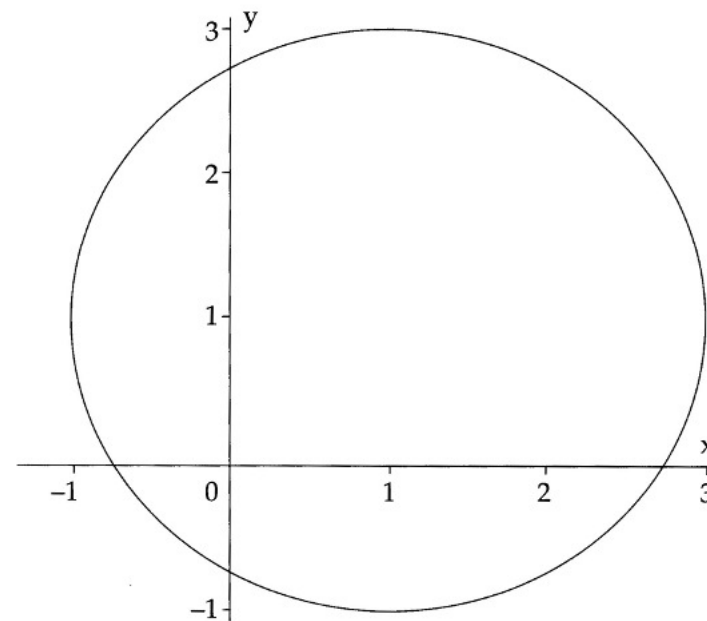
$$\Rightarrow 2k_1 = -2 \Rightarrow k_1 = -1 \text{ e } 2k_2 = -2 \Rightarrow k_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2 + 1 + 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4, \text{ que é a}$$

forma canônica de uma circunferência com centro $(1, 1)$ e raio $r = 2$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-1; 3] \text{ e imagem: } [-1; 3].$$

Gráfico:



7) $x^2 + y^2 + 14x + 8y - 35 = 0$

Solução:

$$(x^2 + 14x) + (y^2 + 8y) = 35 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 14x + k_1^2) + (y^2 + 8y + k_2^2) = 35 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

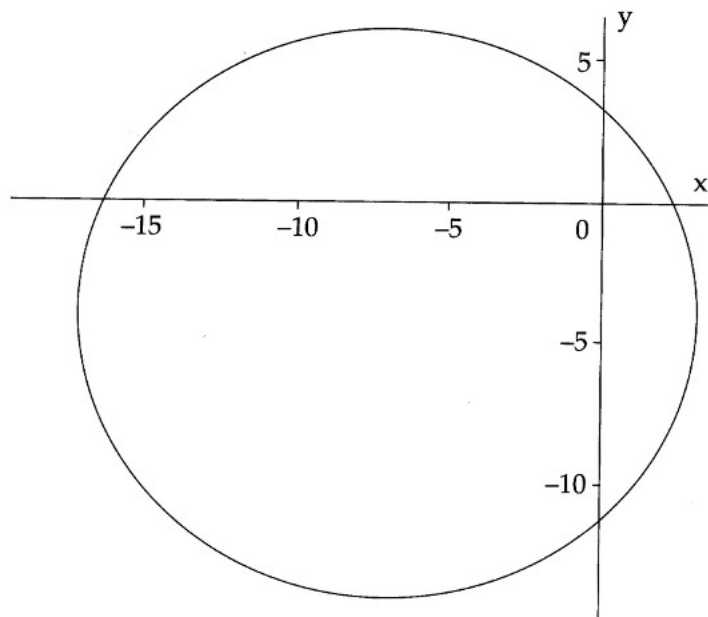
$$\Rightarrow 2k_1 = 14 \Rightarrow k_1 = 7 \text{ e } 2k_2 = 8 \Rightarrow k_2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 14x + 49) + (y^2 + 8y + 16) = 35 + 49 + 16 \Rightarrow (x+7)^2 + (y+4)^2 = 100,$$

que é a forma canônica de uma circunferência com centro $[-7; -4]$ e raio $r = 10$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-17; 3] \text{ e imagem: } [-14; 6].$$

Gráfico:



$$8) x^2 + y^2 - 10y - 75 = 0$$

Solução:

$$(x^2) + (y^2 - 10y) = 75 \Rightarrow$$

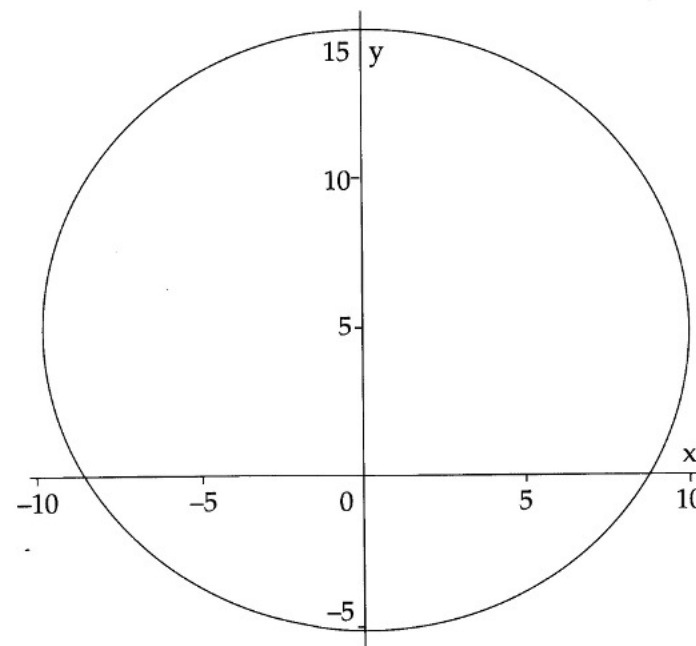
$$\Rightarrow (x^2 + k_1^2) + (y^2 - 10y + k_2^2) = 75 + k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \text{ e } 2k_2 = -10 \Rightarrow k_2 = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2) + (y^2 - 10y + 25) = 75 + 25 \Rightarrow (x)^2 + (y - 5)^2 = 100, \text{ que é a forma canônica de uma circunferência com centro } [0; 5] \text{ e raio } r = 10.$$

$$\Rightarrow \text{domínio: } [-10; 10] \text{ e imagem: } [-5; 15].$$

Gráfico:



$$9) 9x^2 + 4y^2 - 54x - 16y + 61 = 0$$

Solução:

$$9(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = -61 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 6x + k_1^2) + 4(y^2 - 4y + k_2^2) = -61 + 9k_1^2 + 4k_2^2 \Rightarrow$$

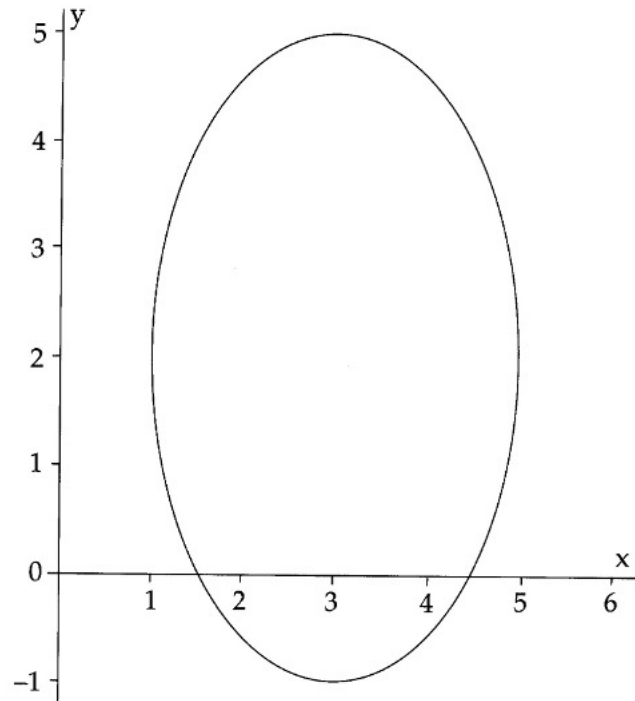
$$\Rightarrow 2k_1 = -6 \Rightarrow k_1 = -3 \text{ e } 2k_2 = -4 \Rightarrow k_2 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 - 4y + 4) = -61 + 81 + 16 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9(x-3)^2 + 4(y-2)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$, que é a forma canônica de uma elipse com centro $(3; 2)$, eixo menor $a = 2$ e eixo maior $b = 3$.

$\Rightarrow$ domínio: $[1; 5]$ e imagem: $[-1; 5]$

Gráfico:



10) $16x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

Solução:

$$(16x^2) + (y^2 + 6y) = 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(x^2 + k_1^2) + (y^2 + 6y + k_2^2) = 7 + 16k_1^2 + k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \text{ e } 2k_2 = 6 \Rightarrow k_2 = 3 \Rightarrow$$

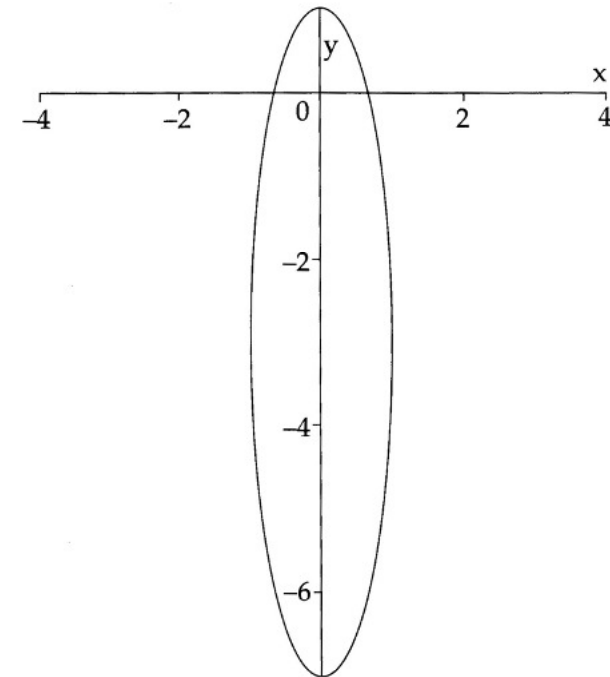
$$\Rightarrow 16x^2 + (y^2 + 6y + 9) = 7 + 9 \Rightarrow 16x^2 + (y + 3)^2 = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{(y + 3)^2}{16} = 1, \text{ que é a forma canônica de uma elipse com centro}$$

$(0; -3)$, eixo menor $a = 1$ e eixo maior $b = 4$.

$\Rightarrow$ domínio: $[-1; 1]$ e imagem: $[-7; 1]$

Gráfico:



11) $6x^2 + 2y^2 - 12x - 8y - 50 = 0$

Solução:

$$(6x^2 - 12x) + (2y^2 - 8y) = 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(x^2 - 2x + k_1^2) + 2(y^2 - 4y + k_2^2) = 50 + 6k_1^2 + 2k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = 2 \Rightarrow k_1 = 1 \text{ e } 2k_2 = -4 \Rightarrow k_2 = -2 \Rightarrow$$

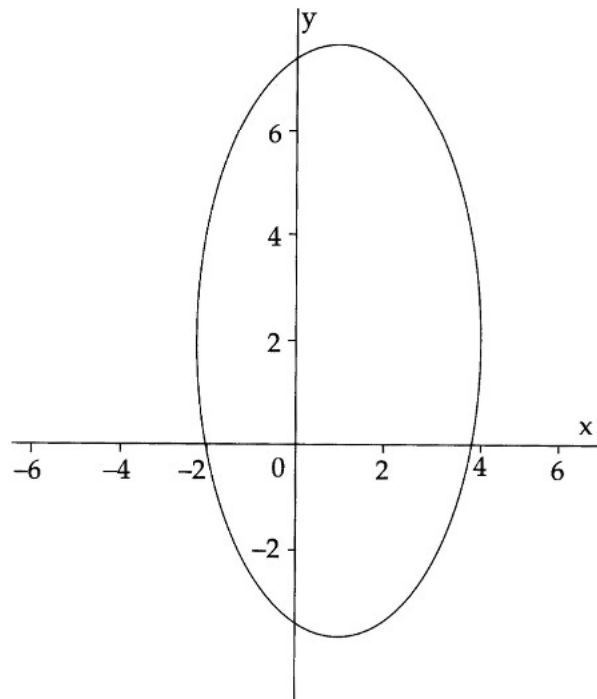
$$\Rightarrow 6(x^2 - 2x + 1) + 2(y^2 - 4y + 4) = 50 + 6 + 8 \Rightarrow 6(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 64 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{\frac{32}{3}} + \frac{(y-2)^2}{32} = 1, \text{ que é a forma canônica de uma elipse com}$$

centro $(1; 2)$, eixo menor $a = \sqrt{\frac{32}{3}}$ e eixo maior $b = \sqrt{32}$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } \left[1 - \sqrt{\frac{32}{3}}; 1 + \sqrt{\frac{32}{3}}\right] \text{ e imagem: } [2 - \sqrt{32}; 2 + \sqrt{32}].$$

Gráfico:



$$12) x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$$

Solução:

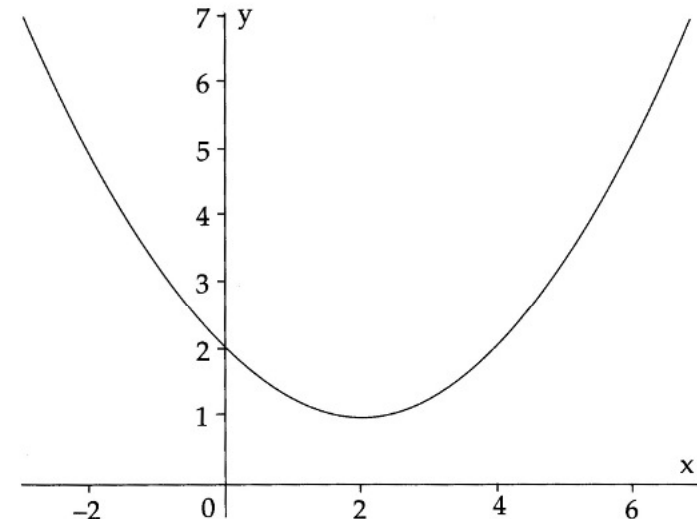
$$x^2 - 4x = 4y - 8 \Rightarrow x^2 - 4x + k_1^2 = 4y - 8 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = -4 \Rightarrow k_1 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4y - 8 + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4y - 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 4(y-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1, \text{ que é a forma canônica de uma parábola com vértice } (2; 1).$$

$$\Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } [1; +\infty)$$

Gráfico:



$$13) x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$$

Solução:

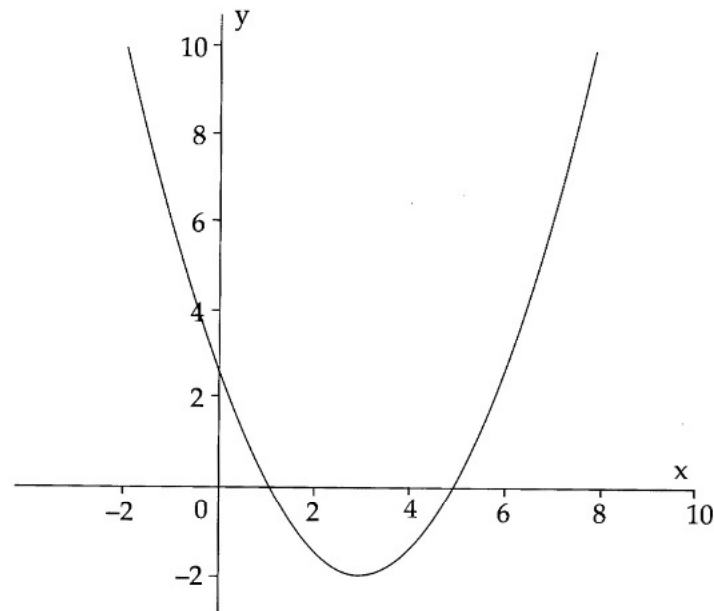
$$x^2 - 6x = 2y - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + k_1^2 = 2y - 5 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = -6 \Rightarrow k_1 = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2y - 5 + 9 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 2y + 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 2(y+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}, \text{ que é a forma canônica de uma parábola com vértice } (3; -2).$$

$$\Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } [-2; +\infty).$$

Gráfico:

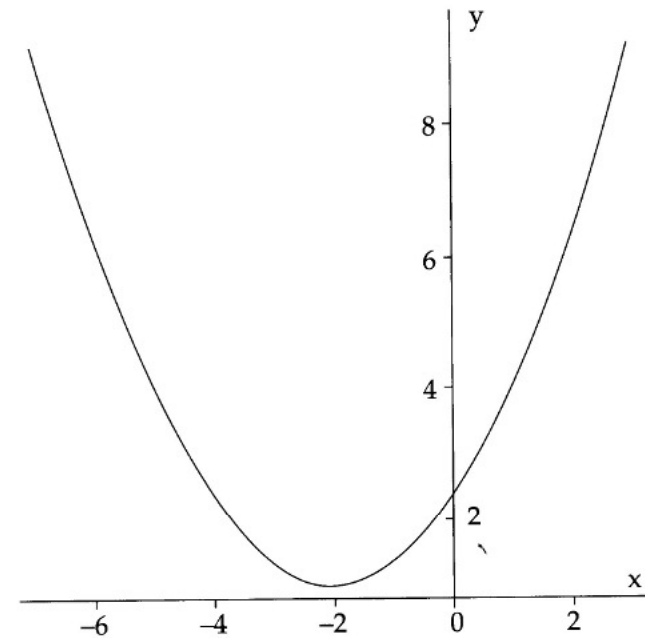


14) $x^2 + 4x - 3y + 7 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x &= 3y - 7 \Rightarrow x^2 + 4x + k_1^2 = 3y - 7 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 4 \Rightarrow k_1 = 2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 &= 3y - 7 + 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 3y - 3 \Rightarrow (x+2)^2 = 3(y-1) \Rightarrow \\
 \Rightarrow 4p &= 3 \Rightarrow p = \frac{3}{4}, \text{ que é a forma canônica de uma parábola com vértice } (-2; 1). \\
 \Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } [1; +\infty).
 \end{aligned}$$

Gráfico:



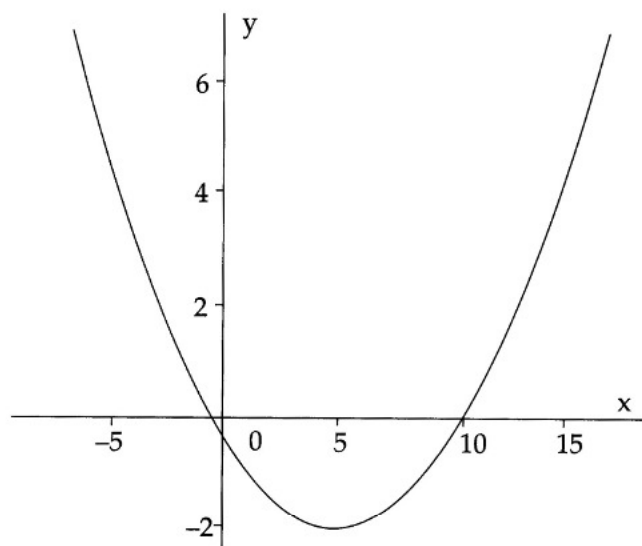
15) $x^2 - 10x - 16y - 7 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 10x &= 16y + 7 \Rightarrow x^2 - 10x + k_1^2 = 16y + 7 + k_1^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 2k_1 &= -10 \Rightarrow k_1 = -5 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 16y + 7 + 25 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 &= 16y + 32 \Rightarrow (x-5)^2 = 16(y+2) \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow p = \frac{1}{4},
 \end{aligned}$$

que é a forma canônica de uma parábola com vértice $(5; -2)$. $\Rightarrow$ domínio: $\mathbb{R}$ e imagem: $[-2; +\infty)$.

Gráfico:



$$16) x^2 + 6x - 12y + 21 = 0$$

Solução:

$$x^2 + 6x = 12y - 21 \Rightarrow x^2 + 6x + k_1^2 = 12y - 21 + k_1^2 \Rightarrow$$

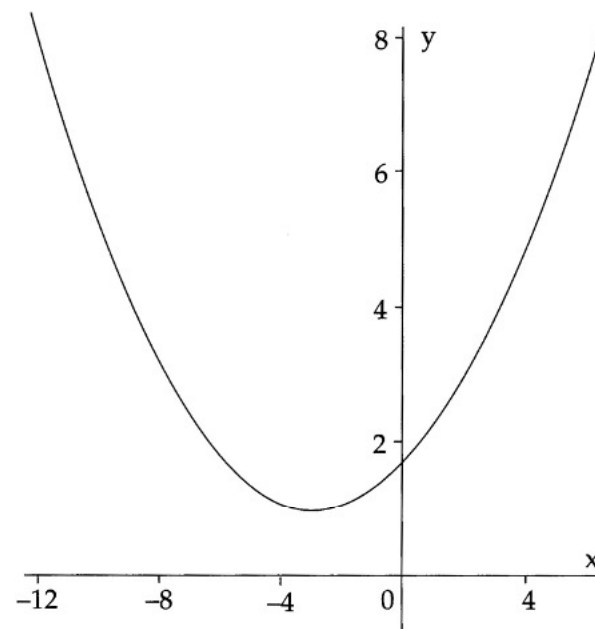
$$\Rightarrow 2k_1 = 6 \Rightarrow k_1 = 3 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 12y - 21 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 12y - 12 \Rightarrow (x+3)^2 = 12(y-1) \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow p = \frac{1}{3}, \text{ que}$$

é a forma canônica de uma parábola com vértice $(-3; 1)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } [1; +\infty).$$

Gráfico:



$$17) x^2 - 2x + 4y + 21 = 0$$

Solução:

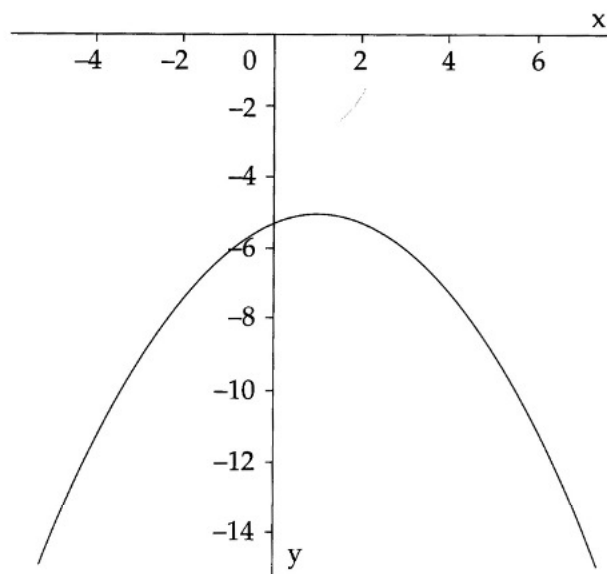
$$x^2 - 2x = -4y - 21 \Rightarrow x^2 - 2x + k_1^2 = -4y - 21 + k_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = -2 \Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4y - 21 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -4y - 20 \Rightarrow (x-1)^2 = -4(y+5) \Rightarrow 4p = -4 \Rightarrow p = -1, \text{ que é a forma canônica de uma parábola com vértice } (1; -5).$$

$$\Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } (-\infty; -5].$$

Gráfico:

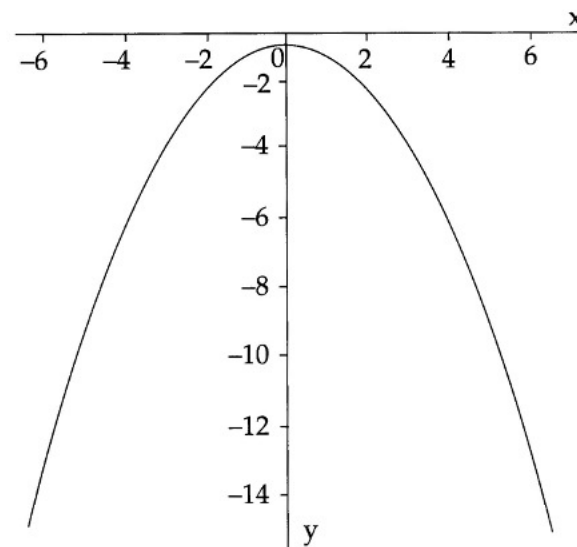


18) $x^2 + 3y + 3 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= -3y - 3 \Rightarrow x^2 + k_1^2 = -3y - 3 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^2 &= -3y - 3 \Rightarrow x^2 = -3(y + 1) \Rightarrow 4p = -3 \Rightarrow p = -\frac{3}{4}, \text{ que é a} \\
 &\text{forma canônica de uma parábola com vértice } (0; -1). \\
 \Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } (-\infty; -1].
 \end{aligned}$$

Gráfico:

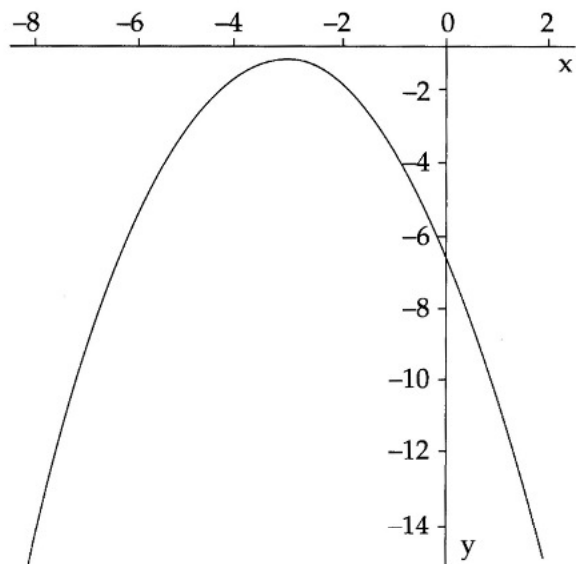


19) $x^2 + 6x + 2y + 11 = 0$

Solução:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 6x &= -2y - 11 \Rightarrow x^2 + 6x + k_1^2 = -2y - 11 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 6 \Rightarrow k_1 = 3 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 &= -2y - 11 + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = -2y - 2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x + 3)^2 &= -2(y + 1) \Rightarrow 4p = -2 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}, \text{ que é a forma canônica} \\
 &\text{de uma parábola com vértice } (-3; -1). \\
 \Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } (-\infty; -1].
 \end{aligned}$$

Gráfico:



$$20) \ y^2 + 2y - 4x - 15 = 0$$

Solução:

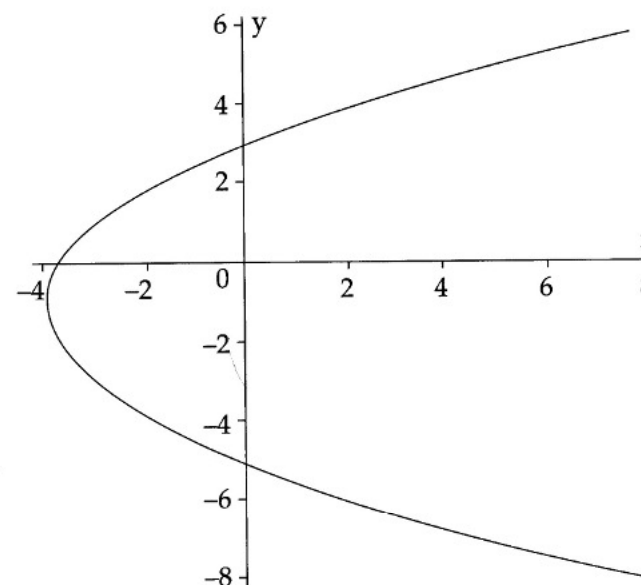
$$y^2 + 2y = 4x + 15 \Rightarrow y^2 + 2y + k_1^2 = 4x + 15 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 2 \Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 4x + 15 + 1 \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 4x + 16 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (y+1)^2 = 4(x+4) \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$, que é a forma canônica de uma parábola com vértice $(-4; -1)$.

$\Rightarrow$ domínio: $[-4; +\infty)$ e imagem: $\mathbb{R}$.

Gráfico:



$$21) \ y^2 - 6y - 2x + 7 = 0$$

Solução:

$$y^2 - 6y = 2x - 7 \Rightarrow y^2 - 6y + k_1^2 = 2x - 7 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = -6 \Rightarrow k_1 = -3 \Rightarrow$$

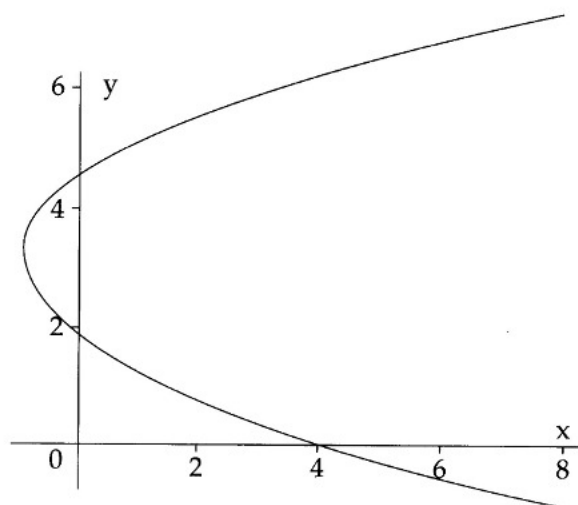
$$\Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 2x - 7 + 9 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = 2x + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y-3)^2 = 2(x+1) \Rightarrow 4p = 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$$
, que é a forma canônica de

uma parábola com vértice $(-1; 3)$.

$\Rightarrow$ domínio: $[-1; +\infty)$ e imagem: $\mathbb{R}$.

Gráfico:



$$22) y^2 + 10y - 4x + 37 = 0$$

Solução:

$$y^2 + 10y = 4x - 37 \Rightarrow y^2 + 10y + k_1^2 = 4x - 37 + k_1^2 \Rightarrow$$

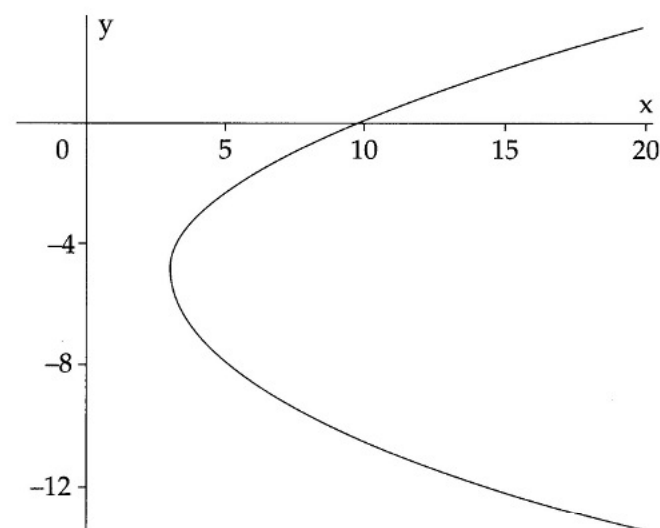
$$\Rightarrow 2k_1 = 10 \Rightarrow k_1 = 5 \Rightarrow y^2 + 10y + 25 = 4x - 37 + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 + 10y + 25 = 4x - 12 \Rightarrow (y + 5)^2 = 4(x - 3) \Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1, \text{ que é}$$

a forma canônica de uma parábola com vértice $(3; -5)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [3; +\infty) \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$23) y^2 - 6x + 36 = 0$$

Solução:

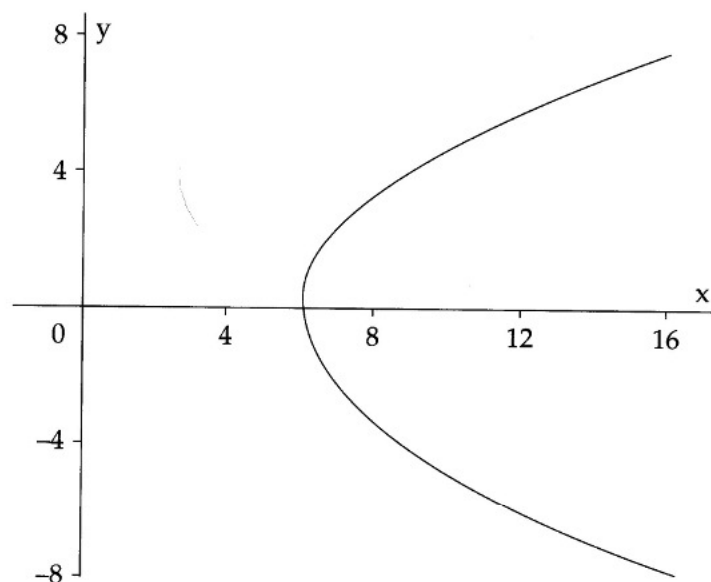
$$y^2 = 6x - 36 \Rightarrow y^2 + k_1^2 = 6x - 36 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = 6x - 36 \Rightarrow y^2 = 6(x - 6) \Rightarrow 4p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}, \text{ que é a forma canô-}$$

nica de uma parábola com vértice $(6; 0)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } [6; +\infty) \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$24) y^2 + 5x + 8y + 21 = 0$$

Solução:

$$y^2 + 8y = -5x - 21 \Rightarrow y^2 + 8y + k_1^2 = -5x - 21 + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 8 \Rightarrow k_1 = 4 \Rightarrow$$

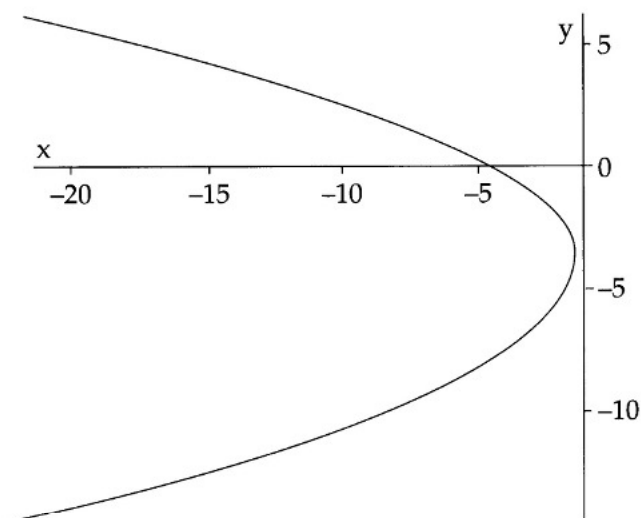
$$\Rightarrow y^2 + 8y + 16 = -5x - 21 + 16 \Rightarrow y^2 + 8y + 16 = -5x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y + 4)^2 = -5(x + 1) \Rightarrow 4p = -5 \Rightarrow p = -\frac{5}{4}, \text{ que é a forma canônica}$$

de uma parábola com vértice $(-1; -4)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } (-\infty; -1] \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$25) y^2 - 6y + 3x + 9 = 0$$

Solução:

$$y^2 - 6y = -3x - 9 \Rightarrow y^2 - 6y + k_1^2 = -3x - 9 + k_1^2 \Rightarrow$$

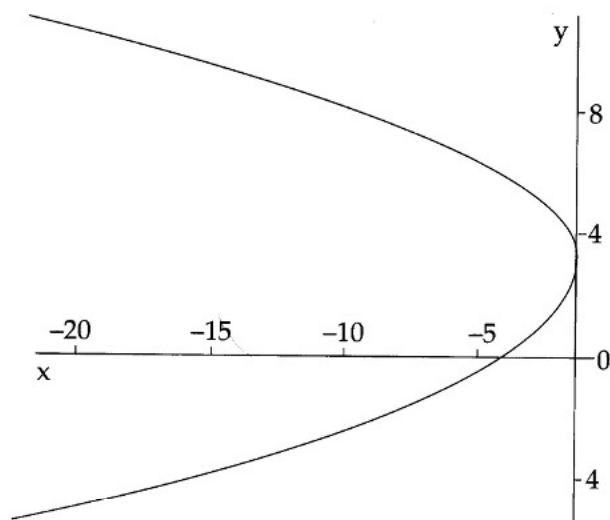
$$\Rightarrow 2k_1 = -6 \Rightarrow k_1 = -3 \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = -3x - 9 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 6y + 9 = -3x \Rightarrow (y - 3)^2 = -3x \Rightarrow 4p = -3 \Rightarrow p = -\frac{3}{4}, \text{ que é a}$$

forma canônica de uma parábola com vértice $(0; 3)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } (-\infty; 0] \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$26) y^2 + 10y + 3x + 28 = 0$$

Solução:

$$y^2 + 10y = -3x - 28 \Rightarrow y^2 + 10y + k_1^2 = -3x + k_1^2 \Rightarrow 2k_1 = 10 \Rightarrow k_1 = 5 \Rightarrow$$

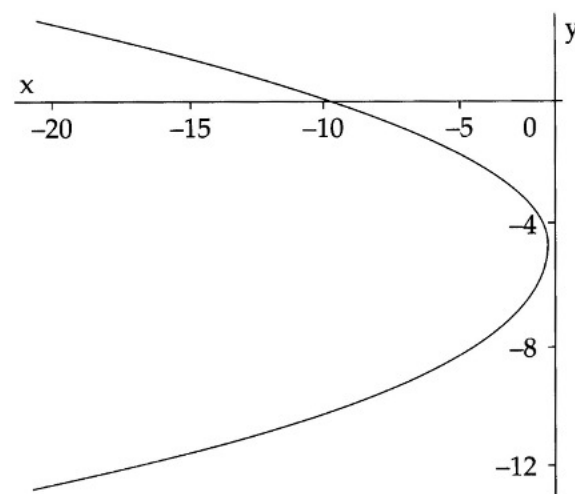
$$\Rightarrow y^2 + 10y + 25 = -3x - 28 + 25 \Rightarrow y^2 + 10y + 25 = -3x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y+5)^2 = -3(x+1) \Rightarrow 4p = -3 \Rightarrow p = -\frac{3}{4}, \text{ que é a forma canônica}$$

de uma parábola com vértice $(-1; -5)$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } (-\infty; 1] \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



$$27) 4y^2 - x^2 + 2x - 56y + 191 = 0$$

Solução:

$$(4y^2 - 56y) + (-x^2 + 2x) = -191 \Rightarrow 4(y^2 - 14y) - (x^2 - 2x) = 191 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(y^2 - 14y + k_1^2) - (x^2 - 2x + k_2^2) = -191 + 4k_1^2 - k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = -14 \Rightarrow k_1 = -7 \text{ e } 2k_2 = -2 \Rightarrow k_2 = -1 \Rightarrow$$

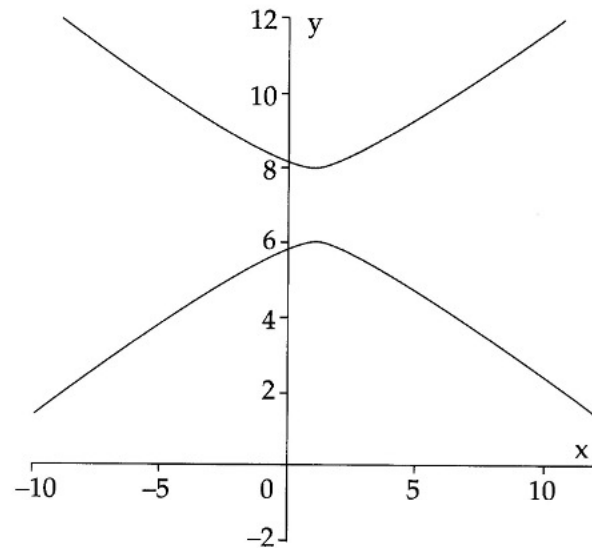
$$\Rightarrow 4(y^2 - 14y + 49) - (x^2 - 2x + 1) = -191 + 196 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(y^2 - 14y + 49) - (x^2 - 2x + 1) = 4 \Rightarrow (y-7)^2 - \frac{(x-1)^2}{4} = 1, \text{ que é a}$$

forma canônica de uma hipérbole com centro $(1; 7)$, $a = 2$ e $b = 1$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } \mathbb{R} \text{ e imagem: } (-\infty; 6] \cup [8; +\infty).$$

Gráfico:



$$28) \quad 4x^2 - 2y^2 + 24x - 12y + 10 = 0$$

Solução:

$$(4x^2 + 24x) + (-2y^2 - 12y) = -10 \Rightarrow 4(x^2 + 6x) - 2(y^2 - 6y) = -10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 6x + k_1^2) - 2(y^2 - 6y + k_2^2) = -10 + 4k_1^2 - 2k_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2k_1 = 6 \Rightarrow k_1 = 3 \text{ e } 2k_2 = -6 \Rightarrow k_2 = -3 \Rightarrow$$

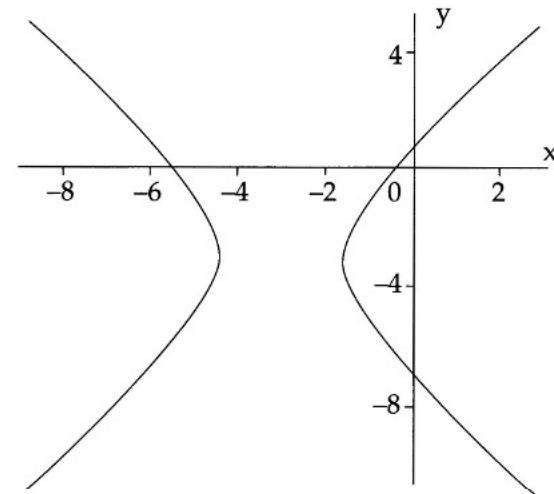
$$\Rightarrow 4(x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 6y + 9) = -10 + 36 - 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 6y + 9) = 8 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1, \text{ que é a}$$

forma canônica de uma hipérbole com centro $(-3; 3)$, $a = \sqrt{2}$ e $b = 2$.

$$\Rightarrow \text{domínio: } (-\infty; -3 - \sqrt{2}] \cup [-3 + \sqrt{2}; +\infty) \text{ e imagem: } \mathbb{R}.$$

Gráfico:



6.7 Exercícios propostos

Identifique o lugar geométrico, determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das equações:

$$1) \quad 9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$$

$$2) \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

$$3) \quad xy + 5x - 3y - 18 = 0$$

$$4) \quad x^2 - 6x + \frac{4y}{3} + \frac{19}{3} = 0$$

$$5) \quad 3x^2 - 2y^2 + 18x - 4y + 20 = 0$$

$$6) \quad 6x^2 - 5y^2 = 30$$

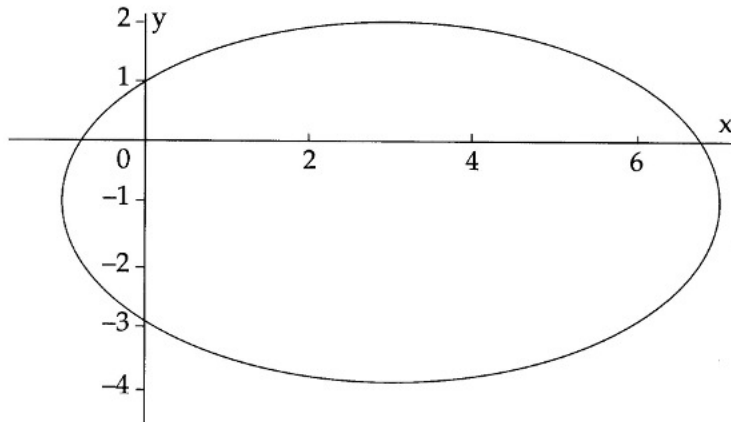
$$7) \quad y^2 + 2y - 4x - 14 = 0$$

$$8) \quad x^2 + y^2 + 6x + 6y + 18 = 0$$

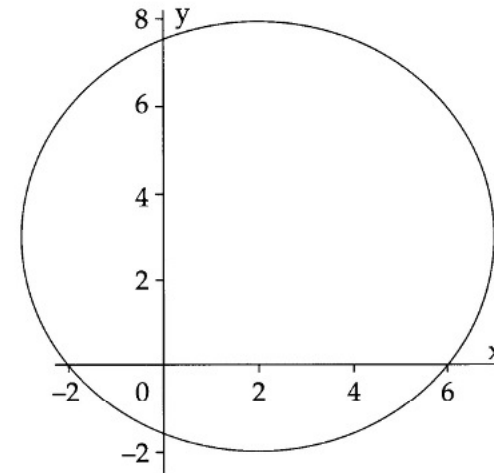
- 9) $x^2 - 2x - 2y + 3 = 0$
 10) $2y^2 - x^2 - 2x - 4y - 2 = 0$
 11) $x^2 - y^2 + 4x - 4y - 3 = 0$
 12) $x^2 - y^2 + 10x - 10y - 4 = 0$
 13) $2x^2 - 5y^2 + 12x - 30y - 37 = 0$
 14) $3y^2 - 2x^2 - 16x + 6y - 35 = 0$
 15) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0$
 16) $3y^2 - 2x^2 - 6 = 0$

6.8 Respostas dos exercícios propostos

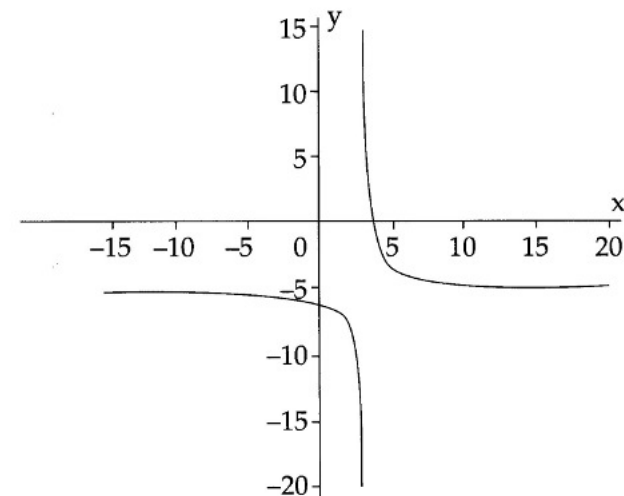
- 1) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$; elipse com centro $(3, -1)$, $a=4$, $b=3$,
 $D = [-1; 7]$, $\text{Im} = [-4, 2]$.



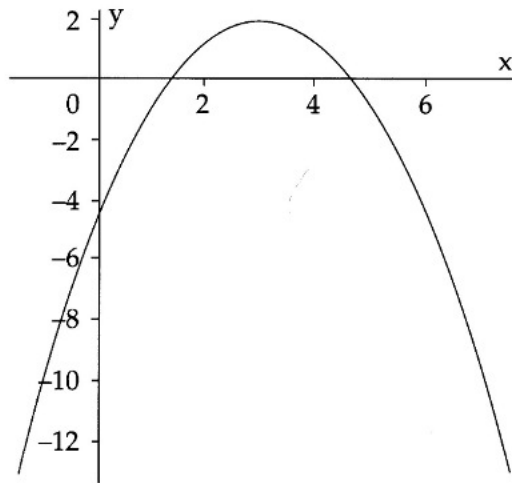
- 2) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$; circunferência com centro $(2, 3)$ e raio $r=5$,
 $D = [3; 7]$, $\text{Im} = [3; 8]$.



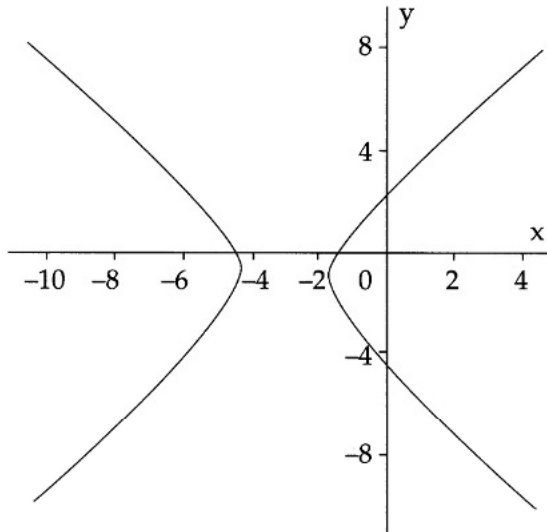
- 3) $(x-3)(y+5)=3$; hipérbole eqüilátera com centro $(3, -5)$, $a=1$, $b=1$,
 $D = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Im} = \mathbb{R} - \{-5\}$.



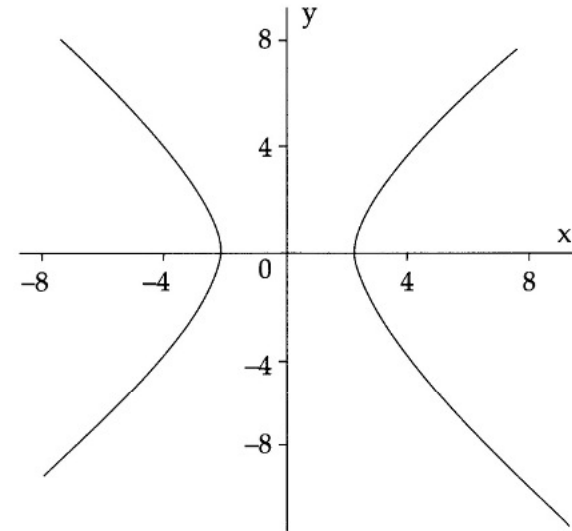
4) $(x-3)^2 + \frac{4}{3}(y-2) = 0$; parábola com vértice $(3; 2)$, $D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = (-\infty; 2]$.



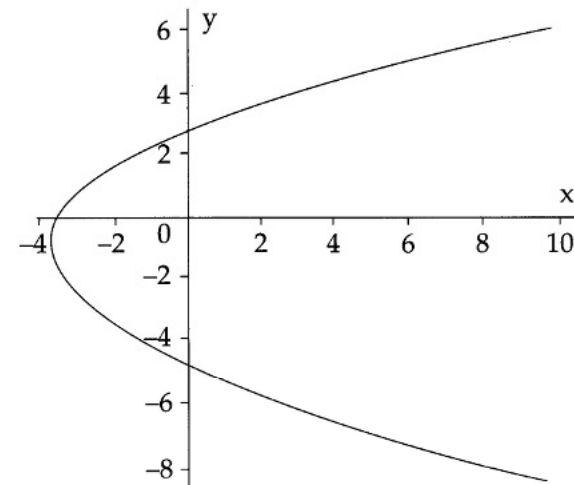
5) $\frac{(x+3)^2}{2} - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$; hipérbole com centro $(-3, -1)$, $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{3}$,
 $D = (-\infty; -3 - \sqrt{2}] \cup [-3 + \sqrt{2}; +\infty)$, $\text{Im} = \mathbb{R}$.



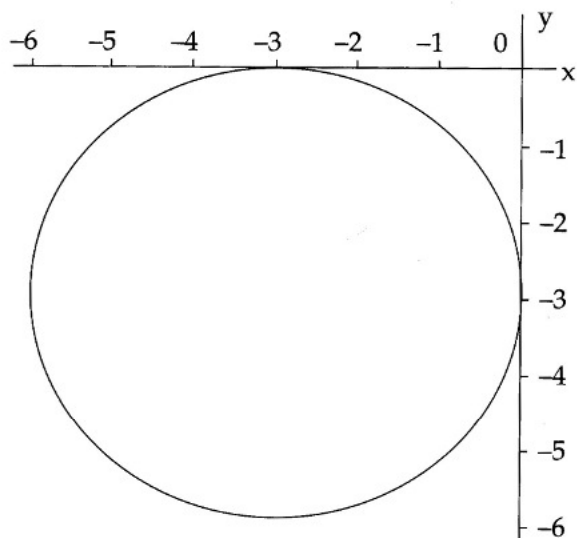
6) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} = 1$; hipérbole com centro $(0, 0)$, $a = 1$, $b = 1$,
 $D = (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; +\infty)$, $\text{Im} = \mathbb{R}$.



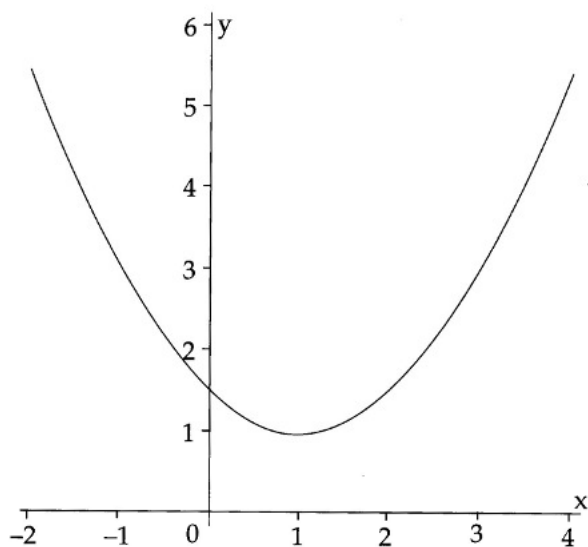
7) $(y+1)^2 = 4(x+4)$; parábola com vértice $(-4; -1)$, $D = [-4; +\infty)$,
 $\text{Im} = \mathbb{R}$.



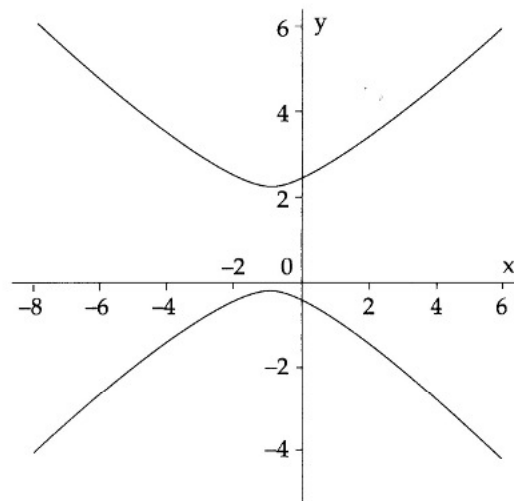
- 8) $(x+3)^2 + (y+3)^2 = 9$; circunferência com centro $(-3, -3)$, $r=3$,
 $D = [-6, 0]$, $\text{Im} = [-6, 0]$.



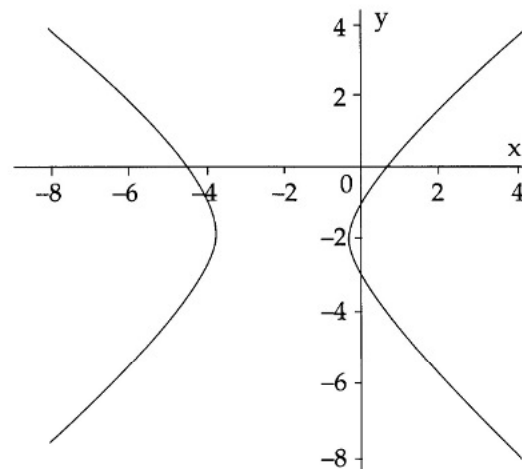
- 9) $(x-1)^2 = 2(y-1)$; parábola com vértice $(1, 1)$, $D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = [1, +\infty)$.



- 10) $\frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{3} = 1$; hipérbole com centro $(-1, 1)$, $a=\sqrt{2}$, $b=2$,
 $D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = (-\infty; 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}; +\infty)$.

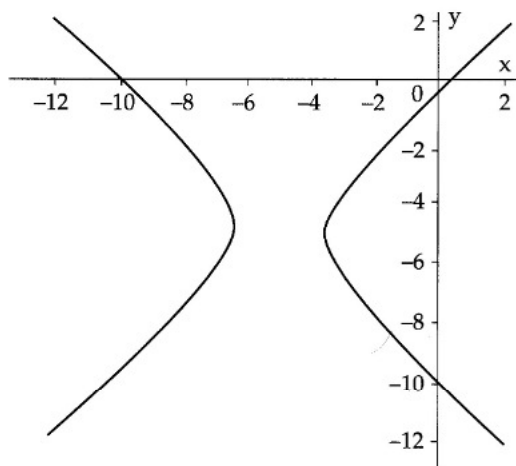


- 11) $\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$; hipérbole com centro $(-2, -2)$, $a=b=\sqrt{3}$,
 $D = (-\infty; -2-\sqrt{3}] \cup [-2+\sqrt{3}; +\infty)$, $\text{Im} = \mathbb{R}$.



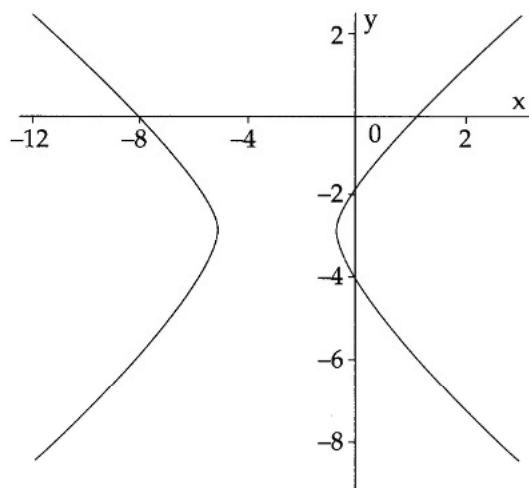
12) $\frac{(x+5)^2}{2} - \frac{(y+5)^2}{2} = 1$; hipérbole com centro $(-5, -5)$, $a = b = \sqrt{2}$,

$D = (-\infty; -5 - \sqrt{2}] \cup [-5 + \sqrt{2}; +\infty)$, $\text{Im} = \mathbb{R}$.



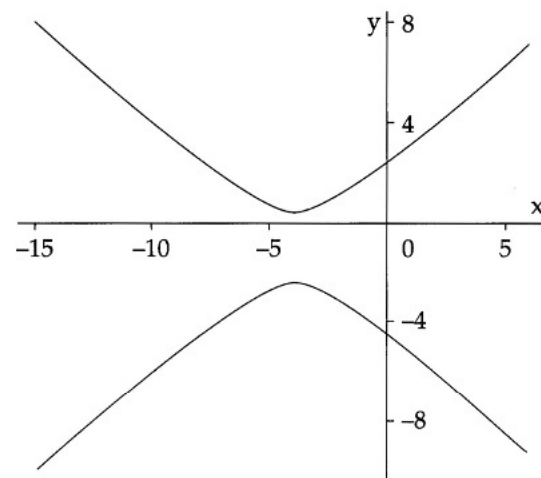
13) $\frac{(x+3)^2}{5} - \frac{(y+3)^2}{2} = 1$; hipérbole com centro $(-3, -3)$, $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{2}$,

$D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = (-\infty; -3 - \sqrt{5}] \cup [-3 + \sqrt{5}; +\infty)$.



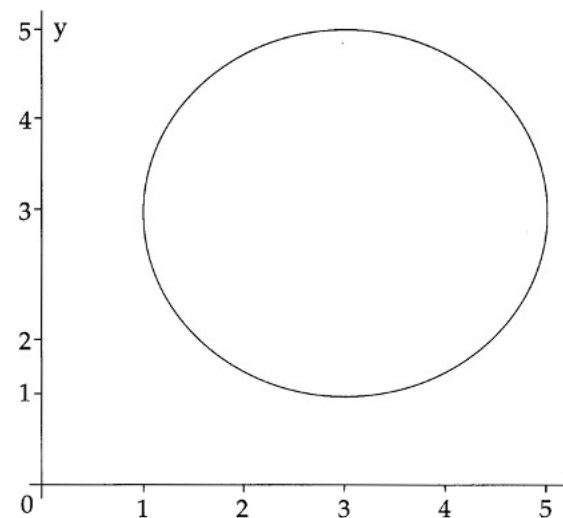
14) $\frac{(y+1)^2}{2} - \frac{(x+4)^2}{3} = 1$; hipérbole com centro $(-4, -1)$, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$,

$D = \mathbb{R}$, $\text{Im} = (-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; +\infty)$.



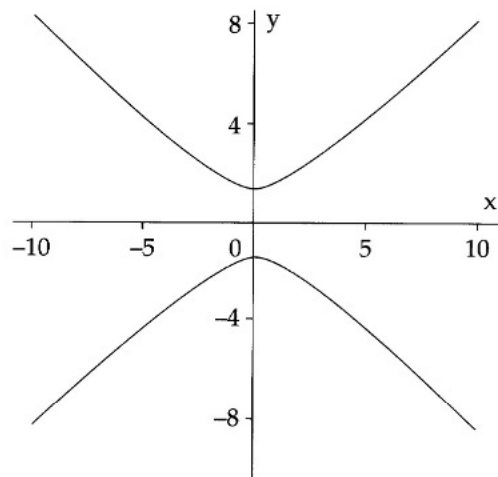
15) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$; circunferência com centro $(3, 3)$, $r = 2$,

$D = [1, 5]$, $\text{Im} = [1, 5]$.



16) $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$; hipérbole com centro $(0, 0)$, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $D = \mathbb{R}$,

$\text{Im} = \mathbb{R} - (-\sqrt{2}; \sqrt{3})$.



Inequações do 2º grau

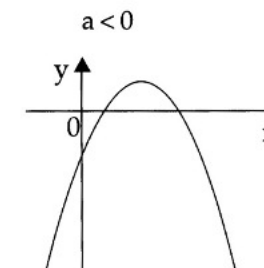
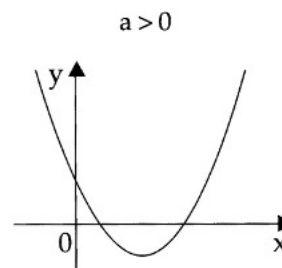
A primeira parte deste capítulo tem por objetivo definir e encontrar a solução de uma inequação do 2º grau, utilizando conceitos de funções do 2º grau. A segunda parte visa definir e construir gráficos da função modular.

7.1 Conceitos iniciais

Para falarmos em inequações do 2º grau, precisamos, inicialmente, estudar de forma mais aprofundada a função do 2º grau cujo gráfico é uma parábola.

A função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tem as seguintes características:

- Concavidade:
 - Se $a > 0$, a concavidade está voltada para cima;
 - Se $a < 0$, a concavidade está voltada para baixo.



- Onde corta o eixo y:
 - $(0, f(0)) = (0, c)$

- Raízes ou zeros:

• $(x, 0) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$. Esse item foi visto no Capítulo 3, quando falamos em “equação do 2º grau”. Concluímos que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, isto é, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

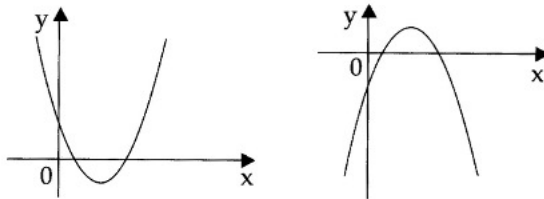
• Como a equação é do 2º grau, temos *exatamente* duas raízes que podem ser:

- reais e distintas, se $\Delta > 0$
- reais e iguais, se $\Delta = 0$
- complexas conjugadas, se $\Delta < 0$

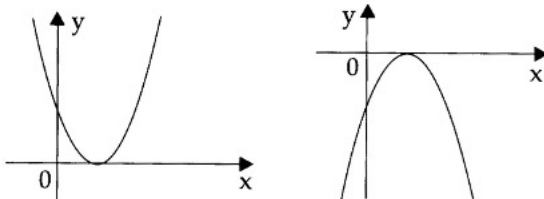
Como o eixo x é um eixo real, significa que:

- corta o eixo x em 2 pontos distintos, se $\Delta > 0$
- tangencia o eixo x (toca em apenas um ponto), se $\Delta = 0$
- não cruza nem toca o eixo x , se $\Delta < 0$

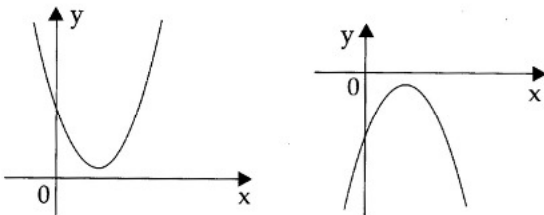
$\Delta > 0$



$\Delta = 0$



$\Delta < 0$



- Vértice:

• O gráfico da parábola é simétrico em relação à reta que passa pelo vértice. Significa que a abscissa do vértice é o ponto médio das abscissas das raízes da parábola.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_v = \frac{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}{2} \Rightarrow x_v = \frac{-2b}{4a} \Rightarrow \boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Como o vértice é um ponto da parábola, ele satisfaz a sua equação.

$$\text{Daí, } y_v = f(x_v) \Rightarrow y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_v = a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

$$\text{Logo, } V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right).$$

- Sinal:

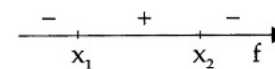
• $\Delta > 0$

• $a > 0$



f é positiva em $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ e f é negativa em $(x_1; x_2)$.

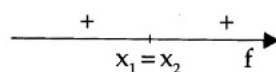
• $a < 0$



f é negativa em $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ e f é positiva em $(x_1; x_2)$.

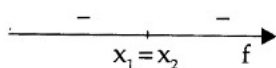
- $\Delta = 0$

- $a > 0$



f é positiva em $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty) = \mathbb{R} - \{x_1\}$.

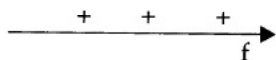
- $a < 0$



f é negativa em $(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty) = \mathbb{R} - \{x_1\}$.

- $\Delta < 0$

- $a > 0$



f é sempre positiva.

- $a < 0$



f é sempre negativa.

Observação:

Dada a equação $f(x) = y = ax^2 + bx + c = 0$, sejam $x = x_1$ e $x = x_2$ suas raízes. Daí, $x - x_1 = 0$ e $x - x_2 = 0$. Logo, $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

Também poderíamos escrever:

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c = (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

Exemplos:

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mapsto f(x) = y = ax^2 + bx + c$

1) $f(x) = y = x^2 - 4x + 3$

Se $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ e teremos as raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$, as equações se tornam:

$$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2 \times 1} = 3$$

Daí,

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3.$$

2) $f(x) = y = x^2 + 2x - 3$

Se $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ e teremos as raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ onde } a = 1, b = 2 \text{ e } c = -3.$$

Assim,

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = -3.$$

Logo,

$$f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x - 1) \cdot (x + 3) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

7.2 Resolução de uma inequação do 2º grau

Definição: Chama-se *inequação do 2º grau* a toda expressão que pode ser reduzida a uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad ax^2 + bx + c \geq 0; \quad ax^2 + bx + c < 0; \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

A resolução decorre do estudo da variação de sinal de um trinômio do 2º grau, visto no item anterior.

7.3 Exercícios resolvidos

1) Dadas as funções $f: \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_{f(x)=y}$ a seguir, estudar seus pontos

principais, esboçar seus gráficos e determinar suas imagens:

- a) $f(x) = y = x^2 - 4x + 3$ d) $f(x) = y = -4x^2 + 12x - 9$
 b) $f(x) = y = 3x^2 - 7x + 2$ e) $f(x) = y = x^2 - 2x + 4$
 c) $f(x) = y = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$ f) $f(x) = y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Solução:

a) $a = 1, b = -4$ e $c = 3$.

Como $a = 1 > 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Ele corta o eixo y em $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em $f(x) = x^2 - 4x + 3$, teremos $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$.

Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = (0, 3)$.

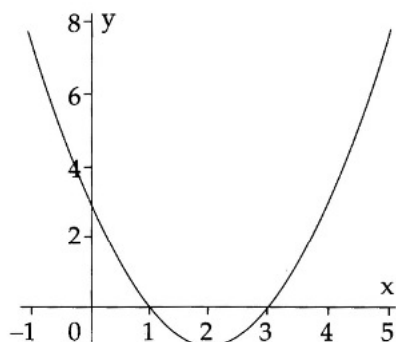
Como $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

As raízes são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$, isto é: $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$ e

$$x_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

O vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-4}{2 \cdot 1}; -\frac{4}{4 \cdot 1}\right) = (2; -1)$.

A partir do esboço deste gráfico, a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = [-1; +\infty)$.



b) $a = 3, b = -7$ e $c = 2$.

Como $a = 3 > 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Ele corta o eixo y em $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$, teremos $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 7 \cdot 0 + 2 = 2$.

Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = (0, 2)$.

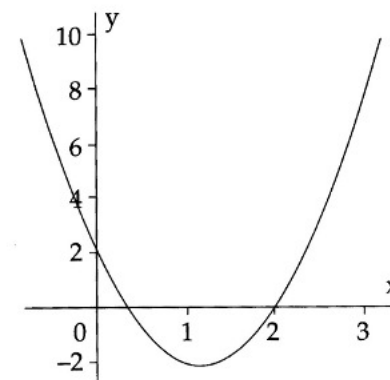
Como $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

As raízes são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6}$, isto é:

$$x_1 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ e } x_2 = \frac{7+5}{6} = \frac{12}{6} = 2.$$

O vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-7}{2 \cdot 3}; -\frac{25}{4 \cdot 3}\right) = \left(-\frac{7}{6}; -\frac{25}{12}\right)$.

A partir do esboço do gráfico a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = \left[-\frac{25}{12}; +\infty\right)$.



c) $a = -1, b = \frac{3}{2}$ e $c = 1$.

Como $a = -1 < 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Ele corta o eixo y em $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$, teremos $f(0) = -0^2 + \frac{3}{2} \cdot 0 + 1 = 1$.

Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = (0, 1)$.

Como $\Delta = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1 = \frac{25}{4} > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

As raízes são:

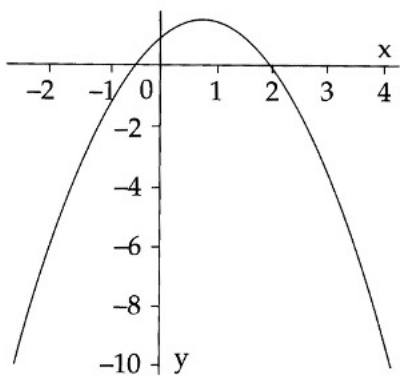
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3 \pm 5}{-4}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{-4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-3-5}{-4} = \frac{-8}{-4} = 2.$$

O vértice da parábola é o ponto:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{\frac{3}{2}}{2 \cdot (-1)}; -\frac{\frac{25}{4}}{4 \cdot (-1)}\right) = \left(\frac{3}{4}; \frac{25}{16}\right).$$

A partir do esboço do gráfico a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = \left(-\infty; \frac{25}{16}\right]$.



d) $a = -4$, $b = 12$ e $c = -9$.

Como $a = -4 < 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo. Ele corta o eixo y em $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em $f(x) = -4x^2 + 12x - 9$, teremos:

$$f(0) = -4 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 9 = -9.$$

Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = (0, -9)$.

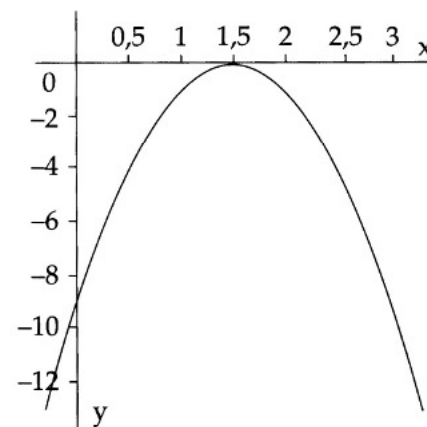
Como $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-9) = 0$, existem duas raízes reais e iguais.

As raízes são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-4)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$, isto é:

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}.$$

O vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{12}{2 \cdot (-4)}; 0\right) = \left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

A partir do esboço do gráfico a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = (-\infty; 0]$.



e) $a = 1$, $b = -2$ e $c = 4$.

Como $a = 1 > 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Ele corta o eixo y em $x = 0$.

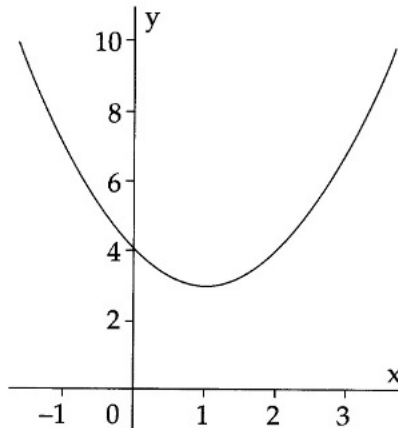
Fazendo $x = 0$ em $f(x) = x^2 - 2x + 4$, teremos $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 4 = 4$.

Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = (0, 4)$.

Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -12 < 0$, existem duas raízes complexas conjugadas.

O vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-2}{2}; -\frac{-12}{4 \cdot 1}\right) = (1; 3)$.

A partir do esboço do gráfico a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = [3; +\infty)$.



f) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ e $c = -\frac{3}{2}$.

Como $a = -\frac{1}{2} < 0$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Ele corta o eixo y em $x = 0$.

Fazendo $x = 0$ em $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$, teremos:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 1 \cdot 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}.$$

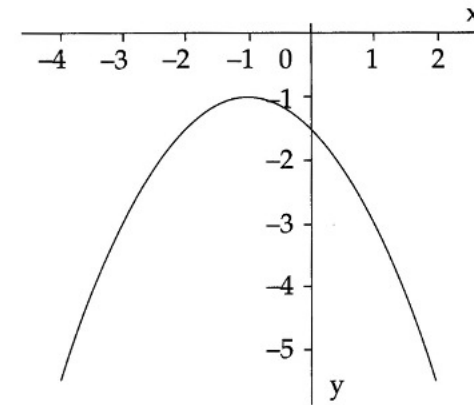
Daí, $(0, f(0)) = (0, c) = \left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

Como $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -2 < 0$, existem duas raízes complexas conjugadas.

O vértice da parábola é o ponto:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}, -\frac{-2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = (-1; -1).$$

A partir do esboço do gráfico a seguir, verificamos que $\text{Im}(f) = (-\infty; -1]$.



2) Dadas as funções $f : \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_{f(x)=y}$ a seguir, determinar suas raízes

reais:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 10$

b) $f(x) = -x^6 - 4x^3 + 32$

Solução:

a) Para determinar as raízes, fazemos $f(x) = 0$, isto é, $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

Para encontrarmos a solução desta equação, substituiremos x^2 por u .

Daí a equação se torna $u^2 - 3u - 10 = 0$.

Como $a = 1$, $b = -3$ e $c = -10$, as raízes são:

$$u = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2}, \text{ isto é:}$$

$$u_1 = \frac{3-7}{2} = -\frac{4}{2} = -2 \text{ e } u_2 = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Como $x^2 = u$, então $x = \pm\sqrt{u}$.

Para determinarmos as raízes da equação $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$, substituiremos $u_1 = -2$ e $u_2 = 5$ na equação $x = \pm\sqrt{u}$.

Daí, para $u_1 = -2$, $x = \pm\sqrt{-2}$ não tem solução real e para $u_2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$ são as duas raízes reais dessa equação.

- b) Para determinar as raízes, façamos $f(x) = 0$, isto é, $-x^6 - 4x^3 + 32 = 0$.

Para encontrarmos a solução dessa equação, substituiremos x^3 por u .

Daí a equação se torna $-u^2 - 4u + 32 = 0$.

Como $a = -1$, $b = -4$ e $c = 32$, as raízes são:

$$u = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 32}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{144}}{-2} = \frac{4 \pm 12}{-2}, \text{ isto é:}$$

$$u_1 = \frac{4+12}{-2} = -\frac{16}{2} = -8 \text{ e } u_2 = \frac{4-12}{-2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Como $x^3 = u$, então $x = \sqrt[3]{u}$.

Para determinarmos as raízes da equação $-x^6 - 4x^3 + 32 = 0$, substituiremos $u_1 = -8$ e $u_2 = 4$ na equação $x = \sqrt[3]{u}$.

Daí, para $u_1 = -8$, $x = \sqrt[3]{-8} = -2$ e para $u_2 = 4$, $x = \sqrt[3]{4}$, são as duas raízes reais dessa equação.

- 3) Estudar os sinais de cada uma das funções do exercício 1.

Solução:

- a) Como o gráfico tem a concavidade voltada para cima e possui duas raízes reais e distintas, a função é negativa para valores de x compreendidos entre as raízes e positiva para os demais valores de x . As raízes determinadas em (1a) são 1 e 3.

Logo, f é positiva em $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ e f é negativa em $(1; 3)$.

- b) Como o gráfico tem a concavidade voltada para cima e possui duas raízes reais e distintas, a função é negativa para valores de x compreendidos entre as raízes e positiva para os demais valores de x . As raízes determinadas em (1b) são $\frac{1}{3}$ e 2.

Logo, f é positiva em $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (2; +\infty)$ e f é negativa em $(\frac{1}{3}; 2)$.

- c) Como o gráfico tem a concavidade voltada para baixo e possui duas raízes reais e distintas, a função é positiva para valores de x compreendidos entre as raízes e negativa para os demais valores de x . As raízes determinadas em (1c) são $-\frac{1}{2}$ e 2.

Logo, f é negativa em $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; +\infty)$ e f é positiva em $(-\frac{1}{2}; 2)$.

- d) Como o gráfico tem a concavidade voltada para baixo e possui duas raízes reais e iguais, a função é negativa para todos os valores de x , exceto a raiz. As raízes determinadas em (1d) são $-\frac{3}{2}$.

Logo, f é negativa em $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

- e) Como o gráfico tem a concavidade voltada para cima e possui duas raízes complexas conjugadas, a função é positiva para todos os valores de x . Logo, f é sempre positiva ($\forall x \in \mathbb{R}$).

- f) Como o gráfico tem a concavidade voltada para baixo e possui duas raízes complexas conjugadas, a função é negativa para todos os valores de x .

Logo, f é sempre negativa ($\forall x \in \mathbb{R}$).

- 4) Resolva as inequações:

- a) $x^2 - 3x + 4 > 0$
 b) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$
 c) $-2x^2 - 4x + 6 \geq 0$

Solução:

- a) Considerando $f(x) = x^2 - 3x + 4$, temos que $a > 0$, então o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Como $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7 < 0$, existem duas raízes complexas conjugadas.

Daí, $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sendo assim, $S = \mathbb{R}$.

- b) Considerando $f(x) = x^2 + 2x + 1$, temos que $a > 0$, então o gráfico tem a concavidade voltada para cima.

Como $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, existem duas raízes reais e iguais.

Daí, $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

As raízes são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$.

Daí, $f(x) = 0$, somente na raiz da equação, isto é, em $x_1 = x_2 = -1$.

Sendo assim, $S = \{-1\}$.

- c) Considerando $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$, temos que $a < 0$, então o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Como $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 6 = 64 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

As raízes são $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-2)} = \frac{4 \pm 8}{-4}$, isto é:

$$x_1 = \frac{4+8}{-4} = -\frac{12}{4} = -3 \text{ e } x_2 = \frac{4-8}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Daí, $f(x) > 0$ para x entre as raízes e $f(x) = 0$ para as raízes ($x_1 = -3$ e $x_2 = 1$).

Sendo assim, $S = [-3; 1]$.

- 5) Resolva as inequações:

a) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 6x - 5) > 0$

b) $\frac{x^2 - 2x - 3}{-x^2 + 5x - 4} \leq 0$

c) $5x \leq 3 - 2x^2 < -x^2 - 1$

d) $-2x^4 + 10x^2 - 8 \leq 0$

Solução:

- a) Sejam $f(x) = x^2 - x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 5$. Queremos determinar, para que valores de x , $f(x) \cdot g(x) > 0$.

Primeiro determinaremos as raízes de $f(x)$ e $g(x)$.

Para $f(x)$, temos:

Como $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2.$$

Como $a > 0$, f é positiva em $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$, f é negativa em $(-2; 3)$ e f é nula em $\{-2; 3\}$.

Para $g(x)$, temos:

Como $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 16 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm 4}{-2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-6+4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-6-4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5.$$

Como $a < 0$, g é negativa em $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$ e g é positiva em $(1; 5)$ e g é nula em $\{1; 5\}$.

	-2	1	3	5	
$f(x) = x^2 - x - 6$	+	-	-	+	+
$g(x) = -x^2 + 6x - 5$	-	-	+	+	-
$f(x) \cdot g(x)$	-	+	-	+	-

As retas pontilhadas em $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$ e $x = 5$ indicam que esses valores de x não farão parte da solução, pois a inequação não poderá ser nula.

Assim, $S = (-2; 1) \cup (3; 5)$.

- b) Sejam $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -x^2 + 5x - 4$. Queremos determinar, para que valores de x , $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

Primeiro determinaremos as raízes de $f(x)$ e $g(x)$.

Para $f(x)$, temos:

Como $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ e } x_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Como $a > 0$, f é positiva em $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, f é negativa em $(-1; 3)$ e f é nula em $\{-1; 3\}$.

Para $g(x)$, temos:

Como $\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Como $a > 0$, g é negativa em $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, g é positiva em $(1; 4)$ e g é nula em $\{1; 4\}$.

	-1	1	3	4	
$f(x) = x^2 - 2x - 3$	+	-	-	+	+
$g(x) = -x^2 + 5x - 4$	-	-	+	+	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	+	-	+	-

As retas pontilhadas em $x = 1$ e $x = 4$ indicam que esses valores de x não farão parte da solução, pois o denominador não poderá ser nulo.

Assim, $S = (-\infty; -1] \cup (1; 3] \cup (4; +\infty)$.

$$c) \begin{cases} 5x \leq 3 - 2x^2 \\ 3 - 2x^2 < -x^2 - 1 \end{cases}$$

Passando todos os termos para o lado esquerdo da desigualdade, temos:

$$\begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \\ -2x^2 + x^2 + 3 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \\ -x^2 + 4 < 0 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por (-1) :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 + 5x - 3 \leq 0 \\ g(x) = x^2 - 4 > 0 \end{cases}$$

Primeiro determinaremos as raízes de $f(x)$ e $g(x)$.

Para $f(x)$, temos:

Como $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3.$$

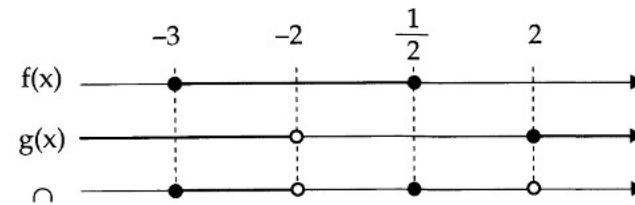
Como $a > 0$, f é positiva em $(-\infty; -3) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, f é negativa em $(-3; \frac{1}{2})$ e f é nula em $\{-3; \frac{1}{2}\}$.

Para $g(x)$, temos:

Como $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 4}{2}, \text{ isto é, } x_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-4}{2} = -2.$$

Como $a > 0$, g é positiva em $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, g é negativa em $(-2; 2)$ e g é nula em $\{-2; 2\}$.



Nesse tipo de representação, a parte em **negrito** corresponde à solução da inequação.

A solução final deve satisfazer as duas inequações $f(x) \leq 0$ e $g(x) > 0$. Dessa forma, determina-se a interseção entre as soluções encontradas para as inequações $f(x)$ e $g(x)$.

Assim, $S = [-3; -2)$.

- d) Para encontrarmos as raízes da equação $f(x) = -2x^4 + 10x^2 - 8$, teremos de substituir x^2 por u . Daí, $g(u) = -2u^2 + 10u - 8 \leq 0$.

As raízes dessa equação são:

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8) = 36 > 0$, ou seja, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-10 \pm 6}{-4}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-10+6}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-10-6}{-4} = \frac{-16}{-4} = 4.$$

Como $a < 0$, g é positiva em $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$, g é negativa em $(1; 4)$ e g é nula em $\{1; 4\}$.

Daí, $u^2 - 5u + 4 \geq 0 \Rightarrow u \leq 1$ ou $u \geq 4$.

Sabendo que $u = x^2$, temos que $x^2 \leq 1$ ou $x^2 \geq 4$, isto é, $x^2 - 1 \leq 0$ ou $x^2 - 4 \geq 0$.

Determinando as raízes de $x^2 - 1 = 0$, teremos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 > 0$, ou seja, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2}{2}, \text{ isto é, } x_1 = \frac{2}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-2}{2} = -1.$$

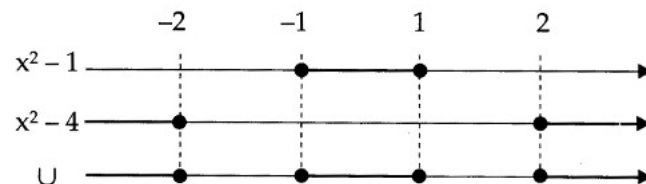
Como $a > 0$, a função é positiva em $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, negativa em $(-1; 1)$ e nula em $\{-1; 1\}$.

Determinando as raízes de $x^2 - 4 = 0$, teremos:

$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 > 0$, ou seja, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 4}{2}, \text{ isto é, } x_1 = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-4}{2} = -2.$$

Como $a > 0$, a função é positiva em $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, negativa em $(-2; 2)$ e nula em $\{-2; 2\}$.



A solução final deve satisfazer pelo menos uma das duas inequações $x^2 - 1 \leq 0$ ou $x^2 - 4 \geq 0$. Nesse caso, determina-se a união entre as soluções encontradas para as duas inequações.

Assim, $S = (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

7.4 Exercícios propostos

- 1) Dadas as funções $f : \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_{f(x)=y}$ a seguir, estudar seus pontos

principais, esboçar seus gráficos e determinar suas imagens:

- $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$
- $f(x) = 4x^2 - 5x + 2$
- $f(x) = -4x^2 - 20x - 25$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$
- $f(x) = -3x^2 - 18x - 24$
- $f(x) = -2x^2 + 5x - \frac{7}{2}$

- 2) Dadas as funções $f : \mathbb{R}_x \rightarrow \mathbb{R}_{f(x)=y}$ a seguir, determinar suas raízes reais:

- $f(x) = -x^4 + 5x^2 + 36$
- $f(x) = x^6 - 7x^3 - 8$
- $f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 4$

- 3) Determinar os valores de r para que a função $f(x) = rx^2 + (2r-1)x$ admita:

- Duas raízes reais e distintas;
- Duas raízes reais e iguais;
- Duas raízes complexas conjugadas.

- 4) O mesmo enunciado do exercício anterior para a função $f(x) = x^2 + (3r+2)x + (r^2+r+2)$.

- 5) Determinar uma equação do 2º grau de raízes:

- 3 e -4

b) $\frac{2}{3}$ e $-\frac{3}{2}$

c) $2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$

6) Estudar os sinais de cada uma das funções do exercício 1.

7) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$

g) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 \geq 0$

b) $-x^2 + 3x + 4 > 0$

h) $-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 \geq 0$

c) $-2x^2 - 14x + 4 \leq 0$

d) $-2x^2 + 3x + 20 \geq 0$

i) $x^2 + 2x + 2 > 0$

e) $-4x^2 + 7x - \frac{3}{2} \geq 0$

j) $-3x^2 + 5x - 4 < 0$

f) $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 > 0$

k) $x^2 + 2x + 2 < 0$

l) $-3x^2 + 5x - 4 > 0$

8) Resolva as inequações:

a) $(x^2 - x - 6) \cdot (x^2 - 2x + 1) < 0$

b) $(4 - x^2) \cdot (x^2 - 4x + 4) > 0$

c) $(-x^2 + 7x - 10) \cdot (x^2 - 10x + 21) < 0$

d) $\frac{x^2 - 1}{2x - x^2} \geq 0$

e) $\frac{x^2 + 4x + 4}{-x^2 + 8x - 16} \geq 0$

f) $\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{x-3} > 1$

g) $\frac{(x+1)^3 - 1}{(x-1)^3 + 1} \geq 1$

h) $-x \leq x^2 - 6 < -x^2 + 6x - 6$

7.5 Respostas dos exercícios propostos

1) a) côncava para cima; corta y em $(0; -6)$; duas raízes reais e distintas

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 2; V = \left(\frac{3}{2}; -\frac{81}{12}\right); \text{Im}(f) = \left[-\frac{81}{12}; +\infty\right).$$

b) côncava para cima; corta y em $(0; 2)$; duas raízes complexas conjugadas;

$$V = \left(\frac{5}{8}; \frac{7}{16}\right); \text{Im}(f) = \left[\frac{7}{16}; +\infty\right).$$

c) côncava para baixo; corta y em $(0; -25)$; duas raízes reais e iguais

$$x_1 = x_2 = -\frac{5}{2}; V = \left(-\frac{5}{2}; 0\right); \text{Im}(f) = \mathbb{R}_-.$$

d) côncava para cima; corta y em $(0; 3)$; duas raízes reais e iguais $x_1 = x_2 = 3$;

$$V = (3; 0); \text{Im}(f) = [3; +\infty).$$

e) côncava para baixo; corta y em $(0; -24)$; duas raízes reais e distintas

$$x_1 = -4 \text{ e } x_2 = -2; V = (-3; 3); \text{Im}(f) = (-\infty; 3].$$

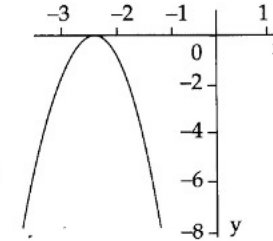
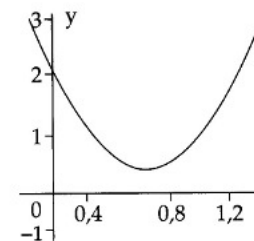
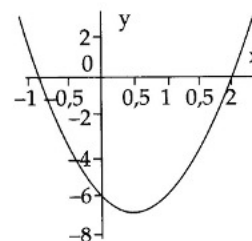
f) côncava para baixo; corta y em $\left(0; -\frac{7}{2}\right)$; duas raízes complexas conjugadas;

$$V = \left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{8}\right); \text{Im}(f) = \left(-\infty; -\frac{3}{8}\right].$$

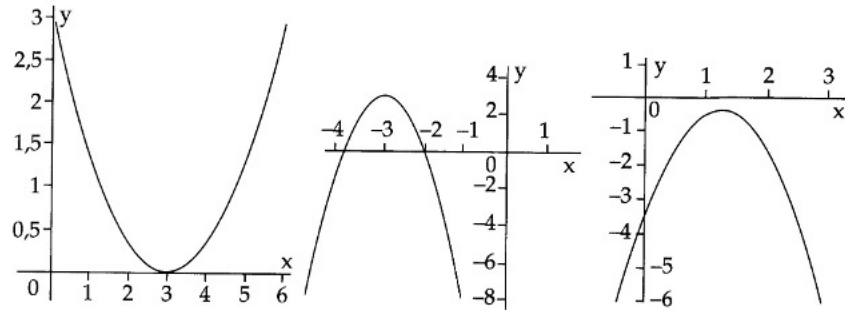
$$f(x) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 2$$

$$f(x) = -4x^2 - 20x - 25$$



$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f(x) = -3x^2 - 18x - 24 \quad f(x) = -2x^2 + 5x - \frac{7}{2}$$



- 2) a) $x = 3$ ou $x = -3$
 b) $x = 2$ ou $x = -1$
 c) $\forall x \in \mathbb{R}$
- 3) a) $r > -\frac{1}{4}$
 b) $r = -\frac{1}{4}$
 c) $r < -\frac{1}{4}$
- 4) a) $r \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$
 b) $r = -2$ ou $r = \frac{2}{5}$
 c) $r \in \left(-2; \frac{2}{5}\right)$
- 5) a) $f(x) = -x^2 - x + 12$
 b) $f(x) = 6x^2 + 5x - 6$
 c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
- 6) a) f é positiva em $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ e f é negativa em $(-1; 2)$.
 b) f é sempre positiva.

c) f é negativa em $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$.

d) f é positiva em $\mathbb{R} - \{3\}$.

e) f é negativa em $(-\infty; -4) \cup (-2; +\infty)$ e f é positiva em $(-4; -2)$.

f) f é sempre negativa.

7) a) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$

b) $(-1; 4)$

c) $\left(-\infty; \frac{-7 - \sqrt{57}}{2}\right] \cup \left[\frac{-7 + \sqrt{57}}{2}; +\infty\right)$

d) $\left[-\frac{5}{2}; 4\right]$

e) $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

f) $\mathbb{R}$

g) $\mathbb{R}$

h) $\{2\}$

i) $\mathbb{R}$

j) $\mathbb{R}$

k) $\emptyset$

l) $\emptyset$

8) a) $(-2; 1) \cup (1; 3)$

b) $(-2; 2)$

c) $(-\infty; 2) \cup (3; 5) \cup (7; +\infty)$

d) $[-1; 0) \cup [1; 2)$

e) $\{-2\}$

f) $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

g) $(0; +\infty)$

h) $[2; 3)$

7.6 Função modular

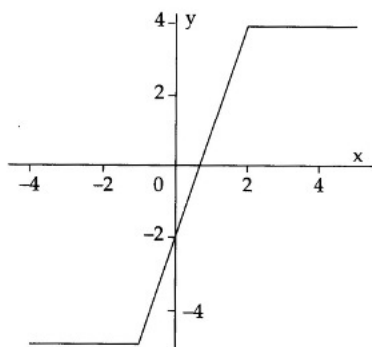
7.6.1 Função definida por várias sentenças

Uma função pode ser dividida em várias sentenças, onde o domínio dela é a união dos domínios das sentenças.

Exemplos:

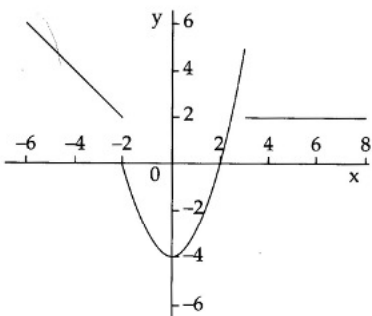
$$f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \rightarrow \underset{f(x)=y}{B \subset \mathbb{R}}$$

$$1) f(x) = \begin{cases} -5 & \text{se } x < -1 \\ 3x - 2 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



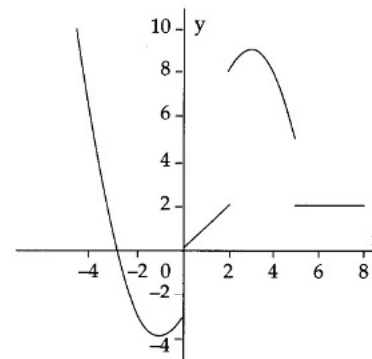
Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-5; 4]$.

$$2) f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq -2 \\ x^2 - 4 & \text{se } -2 < x < 3 \\ 2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$



Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-4; +\infty)$.

$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{se } x < 0 \\ |x| & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 6x - x^2 & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \\ 2 & \text{se } x > 5 \end{cases}$$



Observando o gráfico, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-4; +\infty]$.

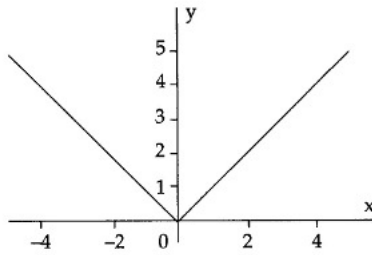
7.6.2 Função modular

Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de *função modular* ou *função módulo* se, $\forall x \in \mathbb{R}$ e associarmos o elemento $|x| \in \mathbb{R}$, isto é,

$$f : \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \rightarrow \underset{f(x)=y=|x|}{B \subset \mathbb{R}}$$

$$\text{Como já definido no Capítulo 3, } f(x) = y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Notemos que o domínio da função é o conjunto $\mathbb{R}$ e a imagem da função é o conjunto $\mathbb{R}_+$.



7.6.3 Exercícios resolvidos

Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

1) $f(x) = y = |3x + 4|$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

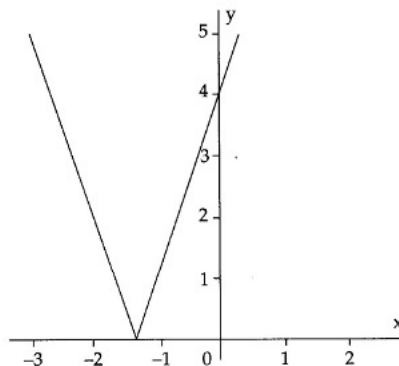
$$f(x) = |3x + 4| = \begin{cases} 3x + 4 & \text{se } 3x + 4 \geq 0 \\ -(3x + 4) & \text{se } 3x + 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 4 & \text{se } x \geq -\frac{4}{3} \\ -3x - 4 & \text{se } x < -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$$

Para $x < -\frac{4}{3}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -3x - 4$ e para $x \geq -\frac{4}{3}$,

traça-se o gráfico da função $f(x) = 3x + 4$.

O gráfico é apresentado a seguir:



2) $f(x) = y = |-x + 7|$

Solução:

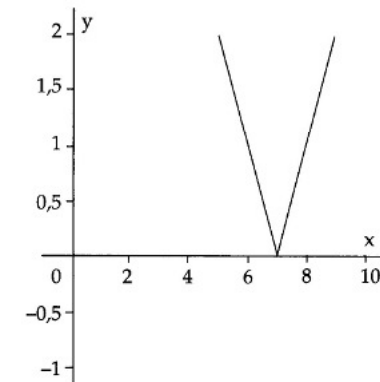
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |-x + 7| = \begin{cases} -x + 7 & \text{se } -x + 7 \geq 0 \\ -(-x + 7) & \text{se } -x + 7 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 7 & \text{se } x \leq 7 \\ x - 7 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

Para $x \leq 7$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x + 7$ e para $x > 7$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x - 7$.

Gráfico:



3) $f(x) = y = |5x + 1|$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

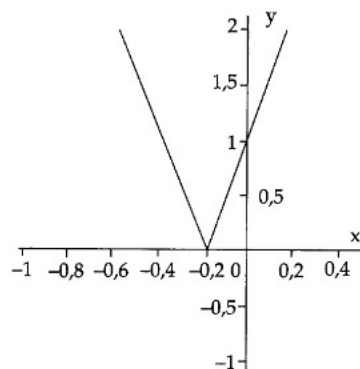
$$f(x) = |5x + 1| = \begin{cases} 5x + 1 & \text{se } 5x + 1 \geq 0 \\ -(5x + 1) & \text{se } 5x + 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5x + 1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{5} \\ -5x - 1 & \text{se } x < -\frac{1}{5} \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

Para $x < -\frac{1}{5}$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -5x - 1$ e para $x \geq -\frac{1}{5}$,

traça-se o gráfico da função $f(x) = 5x + 1$.

Gráfico:



$$4) f(x) = y = |x^2 + 3x - 10|$$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10| = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{se } x^2 + 3x - 10 \geq 0 \\ -(x^2 + 3x - 10) & \text{se } x^2 + 3x - 10 < 0 \end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $g(x) = x^2 + 3x - 10$.As raízes de $g(x)$ são:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0, \text{ ou seja, existem duas raízes reais e distintas.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 7}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ e } x_2 = \frac{-3-7}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$$

Como $a > 0$, g é positiva em $(-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$, negativa em $(-5; 2)$ e nula em $\{-5; 2\}$.

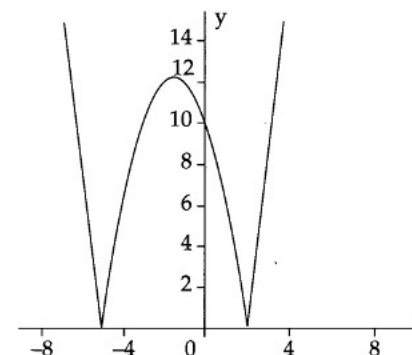
Assim, a função se torna:

$$f(x) = |x^2 + 3x - 10| = \begin{cases} x^2 + 3x - 10 & \text{se } x \leq -5 \text{ ou } x \geq 2 \\ -x^2 - 3x + 10 & \text{se } -5 < x < 2 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

Para $x \leq -5$ ou $x \geq 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x^2 + 3x - 10$ e, para $-5 < x < 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x^2 - 3x + 10$.

Gráfico:



$$5) f(x) = y = |x - 3| + 2$$

Solução:

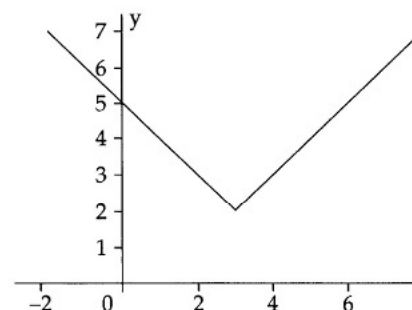
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |x - 3| + 2 = \begin{cases} (x - 3) + 2 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -(x - 3) + 2 & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 5 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = [2; +\infty)$$

Para $x < 3$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x + 5$ e, para $x \geq 3$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x - 1$.

Gráfico:



6) $f(x) = y = |x+5| + x - 2$

Solução:

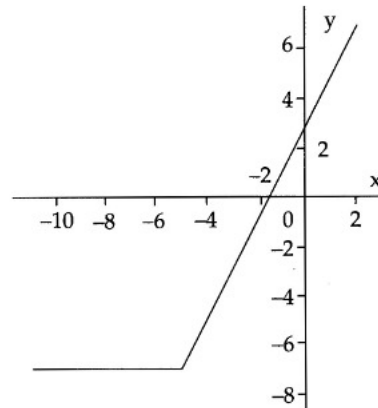
Utilizando a definição de função modular, temos:

$$f(x) = |x+5| + x - 2 = \begin{cases} (x+5) + x - 2 & \text{se } x+5 \geq 0 \\ -(x+5) + x - 2 & \text{se } x+5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+3 & \text{se } x \geq -5 \\ -7 & \text{se } x < -5 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-7; +\infty)$.

Para $x < -5$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -7$ e, para $x \geq -5$, traça-se o gráfico da função $f(x) = 2x+3$.

Gráfico:



7) $f(x) = y = |2x-4| + |x-1|$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

1ª parte: $f_1(x) = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{se } 2x-4 \geq 0 \\ -(2x-4) & \text{se } 2x-4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x-4 & \text{se } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{se } x < 2 \end{cases}$

2ª parte: $f_2(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{se } x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

Somando $f_1(x)$ com $f_2(x)$, na tabela a seguir, temos:

	1	2	
$ 2x-4 $	$-2x+4$	$-2x+4$	$2x-4$
$ x-1 $	$-x+1$	$x-1$	$x-1$
$ 2x-4 + x-1 $	$-3x-5$	$-x+3$	$3x+5$

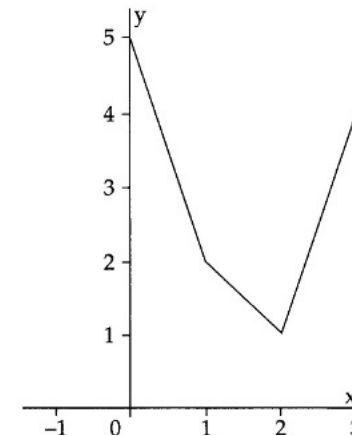
Assim, a função se torna:

$$f(x) = |2x-4| + |x-1| = \begin{cases} -3x+5 & \text{se } x < 1 \\ -x+3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 3x-5 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [1; +\infty)$.

Para $x < 1$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -3x+5$; para $1 \leq x < 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -x+3$ e para $x \geq 2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = 3x-5$.

Gráfico:



$$8) f(x) = y = |2x - 2| + |3x + 6|$$

Solução:

Utilizando a definição de função modular, temos:

$$a) f_1(x) = |2x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } 2x - 2 \geq 0 \\ -(2x - 2) & \text{se } 2x - 2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se } x \geq 1 \\ -2x + 2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$b) f_2(x) = |3x + 6| = \begin{cases} 3x + 6 & \text{se } 3x + 6 \geq 0 \\ -(3x + 6) & \text{se } 3x + 6 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x + 6 & \text{se } x \geq -2 \\ -3x - 6 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

Somando (a) com (b), na tabela a seguir, temos:

	-2	1	
$ 2x - 2 $	$-2x + 2$	$-2x + 2$	$2x + 2$
$ 3x + 6 $	$-3x - 6$	$3x + 6$	$3x + 6$
$ 2x - 2 + 3x + 6 $	$-5x - 4$	$x + 8$	$5x + 4$

Assim, $(f_1 + f_2)(x)$ se torna:

$$(f_1 + f_2)(x) = |2x - 2| + |3x + 6| = \begin{cases} -5x - 4 & \text{se } x < -2 \\ x + 8 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 5x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$c) \text{ Calculemos } |(f_1 + f_2)(x)| = |2x - 2| + |3x + 6|$$

$$\bullet \quad |-5x - 4| = \begin{cases} -5x - 4 & \text{se } -5x - 4 \geq 0 \\ 5x + 4 & \text{se } -5x - 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} -5x - 4 & \text{se } x \leq -\frac{4}{5} \\ 5x + 4 & \text{se } x > -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Como $x < -2$, $|-5x - 4| = -5x - 4$;

$$\bullet \quad |x + 8| = \begin{cases} x + 8 & \text{se } x + 8 \geq 0 \\ -x - 8 & \text{se } x + 8 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x + 8 & \text{se } x \geq -8 \\ -x - 8 & \text{se } x < -8 \end{cases}$$

Como $-2 \leq x < 1$, $|x + 8| = x + 8$;

$$\bullet \quad |5x + 4| = \begin{cases} 5x + 4 & \text{se } 5x + 4 \geq 0 \\ -5x - 4 & \text{se } 5x + 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 5x + 4 & \text{se } x \geq -\frac{4}{5} \\ -5x - 4 & \text{se } x < -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Como $x \geq 1$, $|5x + 4| = 5x + 4$.

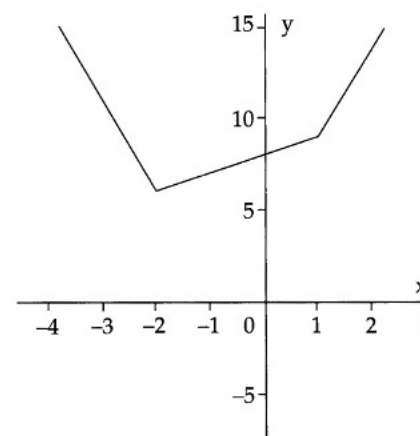
Temos, então:

$$f(x) = |2x - 2| + |3x + 6| = \begin{cases} -5x - 4 & \text{se } x < -2 \\ x + 8 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 5x + 4 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = [6; +\infty).$$

Para $x < -2$, traça-se o gráfico da função $f(x) = -5x - 4$; para $-2 \leq x < 1$, traça-se o gráfico da função $f(x) = x + 8$ e para $x \geq 1$, traça-se o gráfico da função $f(x) = 5x + 4$.

Gráfico:



9) Dadas as funções a seguir, determine seus domínios e reescreva as mesmas como uma função em várias sentenças (sem o módulo):

$$a) f(x) = y = \left| \frac{x+1}{x+5} \right|$$

$$b) f(x) = y = \left| \frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right|$$

$$c) f(x) = y = \left| \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} \right|$$

Solução:

a) Primeiramente, vemos que $D(f) = \mathbb{R} - \{-5\}$, pois o denominador não pode ser nulo.

$$f(x) = \left| \frac{x+1}{x+5} \right| = \begin{cases} \frac{x+1}{x+5} & \text{se } \frac{x+1}{x+5} \geq 0 \\ -\frac{x+1}{x+5} & \text{se } \frac{x+1}{x+5} < 0 \end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $\frac{x+1}{x+5}$. Para isso, faremos a tabela de sinais, indicada a seguir:

	-5	1	
$x+1$	-	-	+
$x+5$	-	+	+
$\frac{x+1}{x+5}$	+	-	+

1º caso: $\frac{x+1}{x+5} \geq 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

2º caso: $\frac{x+1}{x+5} < 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-5; 1)$.

Assim, a função se torna:

$$f(x) = \left| \frac{x+1}{x+5} \right| = \begin{cases} \frac{x+1}{x+5} & \text{se } x < -5 \text{ ou } x \geq 1 \\ -\frac{x+1}{x+5} & \text{se } -5 < x < 1 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-5\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

b) Primeiramente, vemos que $D(f) = \mathbb{R}^*$, pois o denominador não pode ser nulo.

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right| = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 1}{x} & \text{se } \frac{x^2 - 3x + 1}{x} \geq 0 \\ -\frac{x^2 - 3x + 1}{x} & \text{se } \frac{x^2 - 3x + 1}{x} < 0 \end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $\frac{x^2 - 3x + 1}{x}$.

Determinando as raízes do numerador, temos:

Como $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ isto é, } x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como $a > 0$, a função é positiva em $\left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$,

negativa em $\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$ e nula em $\left\{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Analisemos, então, a tabela de sinais indicada a seguir:

	0	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	
$x^2 - 3x + 1$	+	+	-	+
x	-	+	+	+
$\frac{x^2 - 3x + 1}{x}$	-	+	-	+

1º caso: $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} \geq 0$

Como vemos na tabela, $x \in \left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

2º caso: $\frac{x^2 - 3x + 1}{x} < 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Assim, a função se torna:

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 3x + 1}{x} \right| = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 1}{x} & \text{se } 0 < x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{x^2 - 3x + 1}{x} & \text{se } x < 0 \text{ ou } \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^* \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

- c) Primeiramente, vemos que $D(f) = \mathbb{R} - \{-2; 1\}$, pois o denominador não pode ser nulo.

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} \right| = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} & \text{se } \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} \geq 0 \\ -\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} & \text{se } \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} < 0 \end{cases}$$

Precisamos estudar o sinal de $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2}$.

Determinando as raízes do numerador, temos:

Como $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-3-5}{2} = -\frac{8}{2} = -4.$$

Determinando as raízes do denominador, temos:

Como $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 > 0$, existem duas raízes reais e distintas.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ isto é:}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ e } x_2 = \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2.$$

A fatoração de uma equação do 2º grau é dada por:

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.

Logo, se fatorarmos o quociente anterior, teremos:

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x+4) \cdot (x-1)}{(x+2) \cdot (x-1)}.$$

Como $x \neq 1$, $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{x+4}{x+2}$.

Dessa forma, teremos a tabela:

	-2	-4	1	
$x+4$	-	+	+	+
$x+2$	-	-	+	+
$\frac{x+4}{x+2}$	+	-	+	+

1º caso: $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} \geq 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-\infty; -4] \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty)$.

2º caso: $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} < 0$

Como vemos na tabela, $x \in (-4; -2)$.

Assim, a função se torna:

$$f(x) = \left| \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 2} \right| = \begin{cases} \frac{x+4}{x+2} & \text{se } x \leq -4 \text{ ou } -2 < x < 1 \text{ ou } x > 1 \\ -\frac{x+4}{x+2} & \text{se } -4 < x < -2 \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2; 1\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+.$$

7.6.4 Exercícios propostos

- 1) Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

a) $f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{se } x \leq -2 \\ 1 & \text{se } -2 < x \leq 0 \\ x+1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$$b) f(x) = \begin{cases} -3 & \text{se } x < -2 \\ -x-2 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \leq -3 \\ -2 & \text{se } -3 < x < 2 \\ x-2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4 \\ -x^2 + 2x + 8 & \text{se } -2 < x < 4 \end{cases}$$

2) Dadas as funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ definidas a seguir, construir seus gráficos, determinar seus domínios e imagens:

$$a) f(x) = |2x+5|$$

$$h) f(x) = |4x+4| - |3x-4|$$

$$b) f(x) = \left| -3x + \frac{5}{2} \right|$$

$$i) f(x) = |x^2 - 9| - |x-3|$$

$$c) f(x) = |-x^2 - x + 6|$$

$$j) f(x) = |x^2 - 2x| - |x^2 - 4|$$

$$d) f(x) = |2x+6| - 4$$

$$k) f(x) = |3x+2| - 3$$

$$e) f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 5$$

$$l) f(x) = |x^2 - 4| - 6$$

$$f) f(x) = |3x-6| + x - 1$$

$$m) f(x) = |x-2| + x - 4$$

$$g) f(x) = |2x^2 + 3x - 2| + 3x + 2$$

$$n) f(x) = |x+3| - |x-3|$$

$$o) f(x) = |x^2 - 1| - |x-2|$$

3) Dadas as funções a seguir, determine seus domínios e reescreva as mesmas como uma função em várias sentenças (sem o módulo):

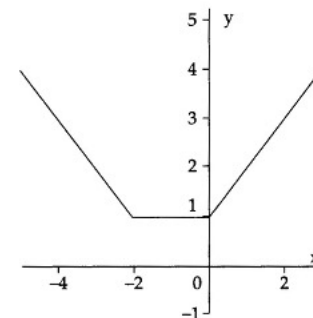
$$a) f(x) = y = \left| \frac{2x-2}{x-3} \right|$$

$$b) f(x) = y = \left| \frac{x^2 - 4}{x} \right|$$

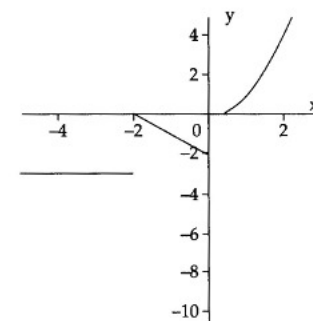
$$c) f(x) = y = \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} \right|$$

7.7 Respostas dos exercícios propostos

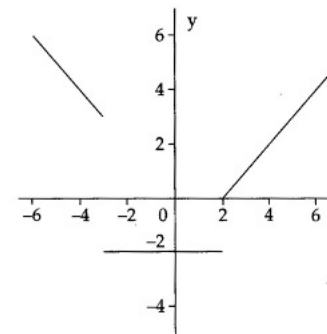
1) a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [1; +\infty)$.



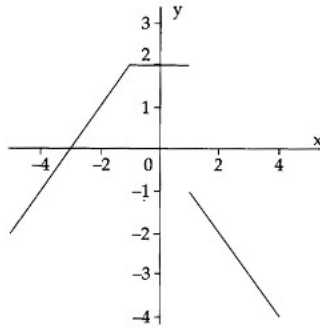
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \{-3\} \cup [-2; +\infty)$.



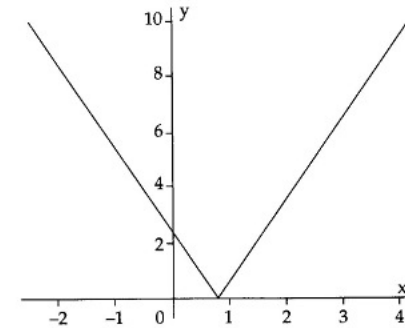
c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+ \cup \{-2\}$.



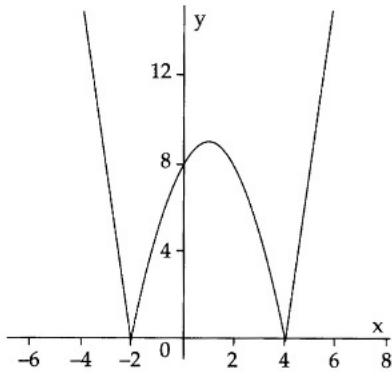
d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = (-\infty; 2]$.



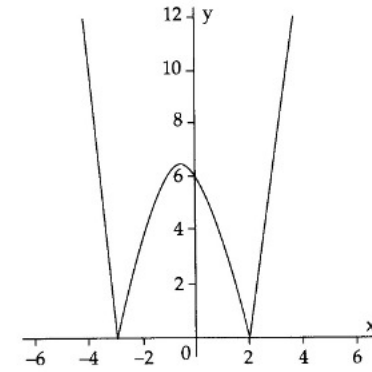
b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



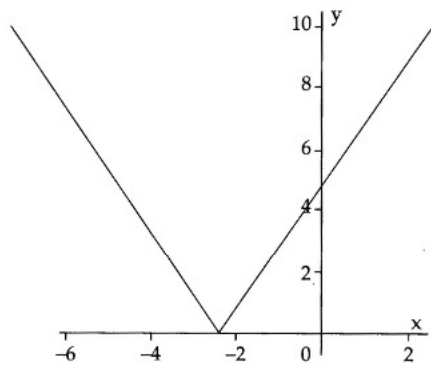
e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



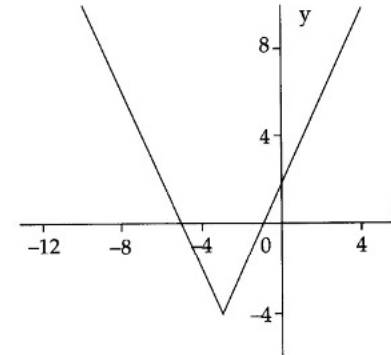
c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



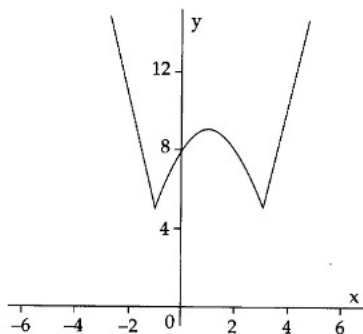
2) a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



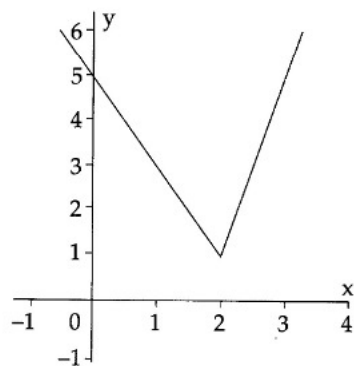
d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-4; +\infty)$.



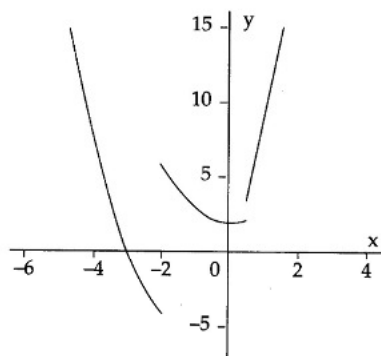
e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [5; +\infty)$.



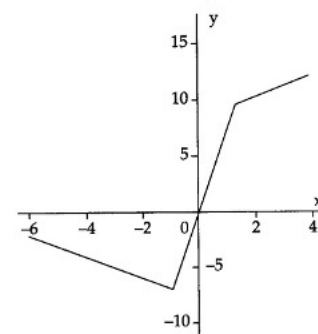
f) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [1; +\infty)$.



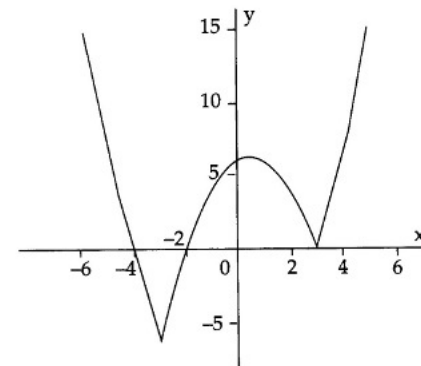
g) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-4; +\infty)$.



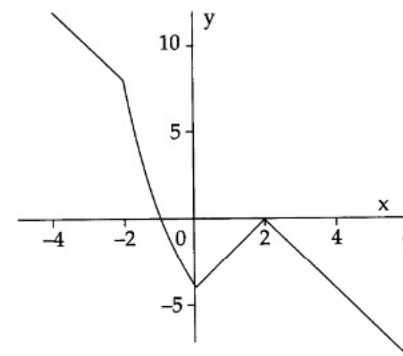
h) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-7; +\infty)$.



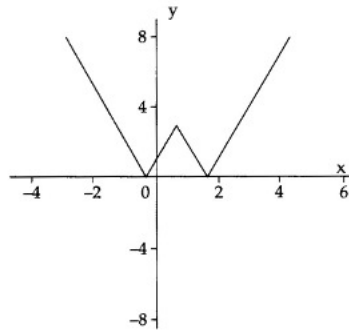
i) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-6; +\infty)$.



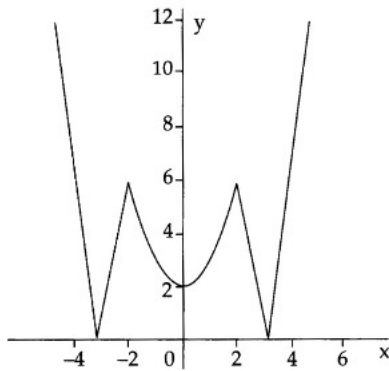
j) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = (-\infty; +\infty)$.



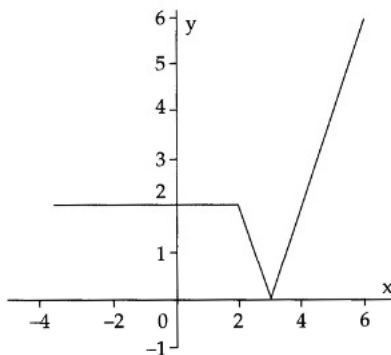
k) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



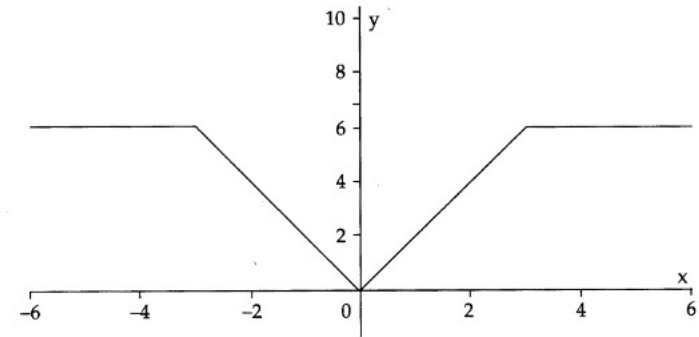
l) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



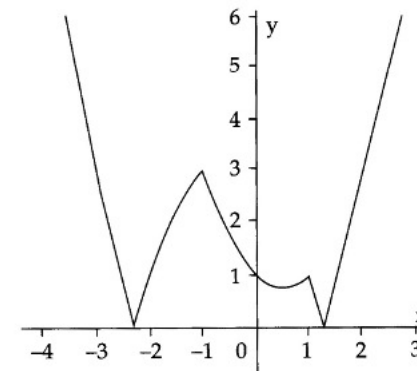
m) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



n) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



o) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.



$$3) \text{ a) } D(f) = \mathbb{R} - \{3\} \text{ e } f(x) = y = \begin{cases} \frac{2x-2}{x-3} & \text{se } x \leq 1 \text{ ou } x > 3 \\ -\frac{2x-2}{x-3} & \text{se } 1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } D(f) = \mathbb{R}^* \text{ e } f(x) = y = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x} & \text{se } -2 < x < 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ -\frac{x^2-4}{x} & \text{se } x \leq -2 \text{ ou } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Outras funções

$$c) D(f) = \mathbb{R} - \{-5; 2\} \text{ e } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{se } x < -5 \text{ ou } 1 \leq x < 2 \text{ ou } x > 2 \\ -\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{se } -5 < x < 1 \end{cases}$$

Este capítulo finaliza a apresentação dos tipos de função. Aqui, serão estudados vários tipos de função e seus respectivos gráficos: funções par e ímpar, função x^3 , funções recíproca e máximo inteiro. Serão introduzidos os conceitos de função composta, funções injetora, sobrejetora e bijetora e funções inversas e simétricas. Por fim, serão apresentadas as funções exponenciais e logarítmicas, que são utilizadas em várias funções econômicas, e suas respectivas representações gráficas.

8.1 Função par e função ímpar

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.
 $\quad \quad \quad x \quad \quad \quad \mapsto \quad f(x)=y$

Definição 1: Chama-se função par aquela em que $f(x) = f(-x)$. Geometricamente, o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (y).

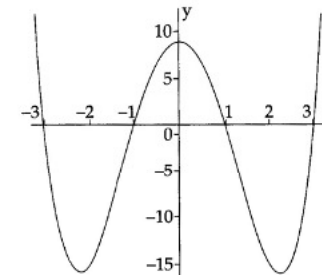
Definição 2: Denomina-se função ímpar aquela em que $f(x) = -f(-x)$. Geometricamente, o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema.

Exemplos:

1) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é uma função par, pois:
 $\quad \quad \quad x \quad \quad \quad \mapsto \quad f(x)=y=x^4-10x^2+9$

$$f(-x) = (-x)^4 - 10(-x)^2 + 9 = x^4 - 10x^2 + 9 = f(x)$$

Observemos, no gráfico a seguir, a simetria em relação ao eixo y.

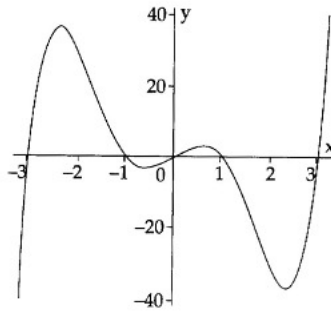


2) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é uma função ímpar, pois:

$$f(x) = y = x^5 - 10x^3 + 9x$$

$$f(-x) = (-x)^5 - 10(-x)^3 + 9(-x) = -x^5 + 10x^3 - 9x = -f(x)$$

Observemos, no gráfico a seguir, a simetria em relação à origem.



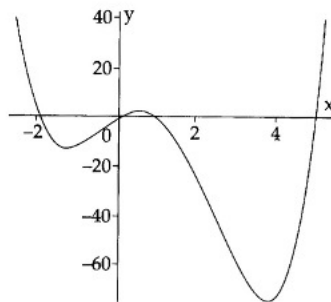
3) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ não é nem par nem ímpar, pois:

$$f(x) = y = x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 10x$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^3 - 7(-x)^2 + 10(-x) = x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 10x$$

Essa expressão não é igual a $f(x)$ nem a $-f(x)$.

Observemos, no gráfico a seguir, como não há simetria em relação ao eixo y nem à origem.



8.2 Função $f(x) = x^3$

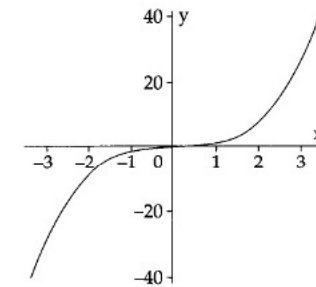
Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

Essa função é muito utilizada ao se estudar o cálculo. Serve de exemplo e contra-exemplo em diversas situações.

Verificamos, inicialmente, que:

- a) $D(f) = \mathbb{R}$.
- b) $x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1)^3 < (x_2)^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, o que significa que f é crescente.
- c) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, pois $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}$, tal que $y = x^3$ (ou $x = \sqrt[3]{y}$).
- d) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$. Portanto, ela é ímpar (simétrica em relação à origem).

Observemos, então, seu gráfico:



8.3 Função $f(x) = \frac{1}{x}$ ou função recíproca

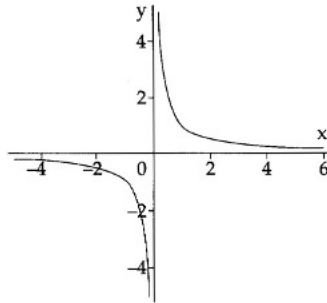
Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, onde $A = D(f) = \mathbb{R}^*$. Essa função recebe o

nome de *função recíproca*.

A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

A função é ímpar, pois $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$, isto é, simétrica em relação à origem.

Seu gráfico é uma hipérbole equilátera.



8.4 Função máximo inteiro

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Essa função recebe o nome de *função máximo inteiro* e $[x]$ significa o maior inteiro que não supera x .

Exemplos:

- 1) $[4,7] = 4$ 2) $[-0,8] = -1$ 3) $[7] = 7$

Vamos construir o gráfico desta função $y = [x]$:

$$D(f) = \mathbb{R}$$

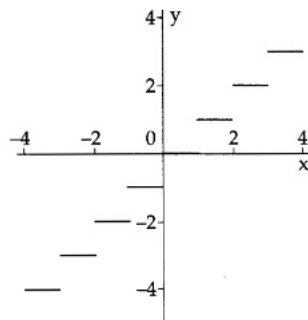
$$-4 \leq x < -3 \Rightarrow [x] = -4 \qquad 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$$

$$-3 \leq x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \qquad 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1$$

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \qquad 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \qquad 3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3$$

Assim, o gráfico de $f(x) = [x]$ é:

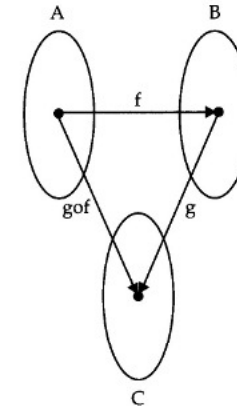


Notemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$.

8.5 Função composta

Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} C \subset \mathbb{R}$. Chama-se *função composta* de g e f à função $h : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} C \subset \mathbb{R}$.

$$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$



Observações:

- 1) A expressão $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, se lê: *g composta com f* ou *g círculo f* ou, simplesmente, $g \circ f$.
- 2) A composta $g \circ f$ só está definida quando o contradomínio da f é igual ao domínio da g (conjunto B).
- 3) Em geral, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemplos:

- 1) Sejam as funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 2x + 1 + 1 = 2x + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = 2(x + 1) + 1 = 2x + 3$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x + 1) = x + 1 + 1 = x + 2$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

2) Sejam as funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = -x + 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 1) = (-x + 1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = -(x^2 - 1) + 1 = -x^2 + 1 + 1 = -x^2 + 2$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1 - 1 = x^4 - 2x^2$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x + 1) = -(-x + 1) + 1 = x - 1 + 1 = x$$

3) Sejam as funções $f(x) = x - 6$ e $g(x) = -x^2 + 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x^2 + 1) = (-x^2 + 1) - 6 = -x^2 - 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 6) = -(x - 6)^2 + 1 = -(x^2 - 12x + 36) + 1 = -x^2 + 12x - 36 + 1 = -x^2 + 12x - 35$$

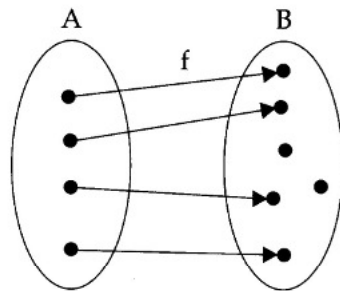
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 6) = (x - 6) - 6 = x - 12$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x^2 + 1) = -(-x^2 + 1) + 1 = x^2 - 1 + 1 = x^2$$

8.6 Funções injetora, sobrejetora e bijetora

Definição: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ pode ser *injetora* ou *injetiva* se, e somente se, $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analogamente, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.



Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ com $f(x) = y$.

1) $f(x) = 3x$ é injetora, pois:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

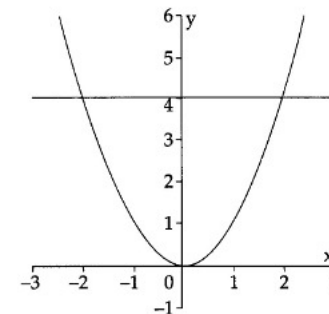
$$2 \neq 5 \Rightarrow 3 \cdot 2 \neq 3 \cdot 5 \Rightarrow 6 \neq 15 \Rightarrow f(2) \neq f(5)$$

2) $f(x) = \frac{1}{2x}$ é injetora, pois:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{2x_1} \neq \frac{1}{2x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

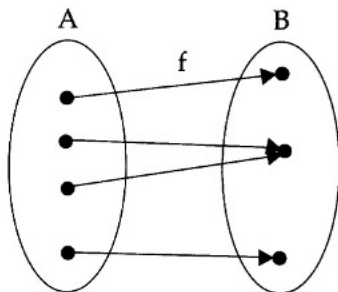
$$-1 \neq 3 \Rightarrow \frac{1}{2 \cdot (-1)} \neq \frac{1}{2 \cdot 3} \Rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{6} \Rightarrow f(-1) \neq f(3)$$

3) $f(x) = x^2$ não é injetora, pois, por exemplo, se $x_1 = 2 \neq x_2 = -2$, temos que $2^2 = (-2)^2 = 4 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 4$



Definição: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ pode ser *sobrejetora* ou *sobrejetiva* se, e somente se, $\forall y \in B, \exists x \in A$, tal que $f(x) = y$.

Significa que, para ser sobrejetora, $\text{Im}(f) = \text{CD}(f)$.



Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $x \mapsto f(x) = y$

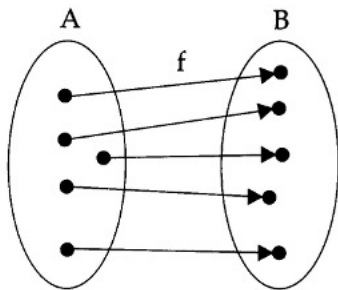
1) $f(x) = 3x$ é sobrejetora, pois:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \text{ tal que } f(x) = y = 3x$$

2) $f(x) = x^2$ não é sobrejetora (se considerarmos o contradomínio como o conjunto dos reais), pois, por exemplo, se $y = -2$, $\nexists x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y = x^2$.

Definição: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ pode ser *bijetora* ou *bijetiva* se, e somente se, ela for injetora e sobrejetora (ao mesmo tempo).

Diz-se que uma função é bijetora se ela tem uma relação um a um. Veja o conjunto a seguir:



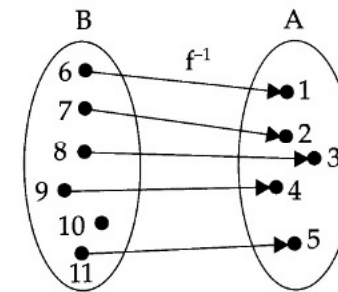
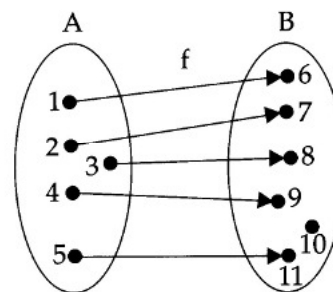
8.7 Função inversa e função simétrica

Como toda função é uma relação, podemos determinar a relação inversa de uma função, da mesma maneira que fizemos com a relação no Capítulo 4.

Essa relação inversa também será uma função, somente quando a função for bijetora (a inversa também será bijetora).

Exemplos:

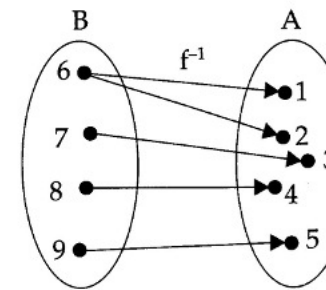
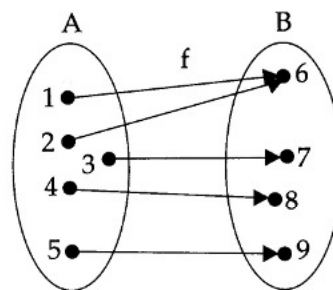
1) Neste exemplo, $f : A \rightarrow B$, $D(f) = A$, $\text{Im}(f) = \{6, 7, 8, 9, 11\} \neq B$.



A relação inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$, $D(f^{-1}) \neq B$, $\text{Im}(f^{-1}) = A$ não é uma função (o elemento 10 não tem imagem).

A função f é injetora, pois $\forall x_1, x_2 \in A$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Ela não é sobrejetora, pois $\nexists x \in A$, tal que $f(x) = 10$. Logo, não é bijetora.

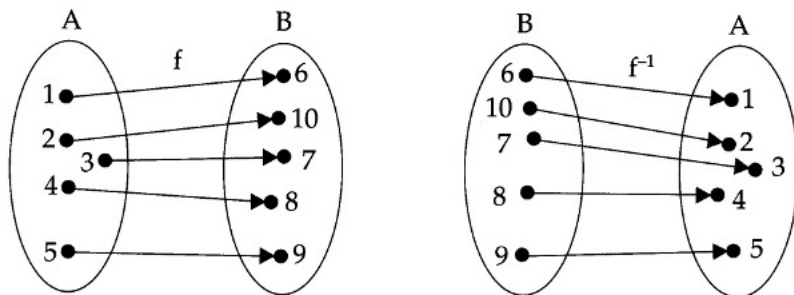
2) Neste exemplo, $f : A \rightarrow B$, $D(f) = A$, $\text{Im}(f) = B$.



A relação inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$, $D(f^{-1}) = B$, $\text{Im}(f^{-1}) = A$ não é uma função (o elemento 6 tem duas imagens).

A função f não é injetora, pois para $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, $f(x_1) = f(x_2)$. Ela é sobrejetora, pois $\forall y \in B, \exists x \in A$ tal, que $f(x) = y$. Logo, não é bijetora.

3) Neste exemplo, $f: A \rightarrow B$, $D(f) = A$, $\text{Im}(f) = B$.



A relação inversa $f^{-1}: B \rightarrow A$, $D(f^{-1}) = B$, $\text{Im}(f^{-1}) = A$ é função.

A função f é bijetora, pois ela é injetora e sobrejetora.

Teorema: Seja $f: A \rightarrow B$ uma função. A relação $f^{-1}: B \rightarrow A$ é uma função se, e somente se, f for bijetora.

Definição: Se $f: A \rightarrow B$ é uma função bijetora, a relação inversa de f é uma função de B em A que denominamos *função inversa de f* e indicamos por f^{-1} .

Para determinarmos a função ou relação inversa, temos de explicitar x em relação a y .

Propriedades:

- 1) $D(f^{-1}) = \text{Im}(f) = B$
- 2) $\text{Im}(f^{-1}) = D(f) = A$
- 3) $(f^{-1})^{-1} = f$

Exemplos:

$$1) f: A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} \quad f(x) = y = 3x + 2$$

Nesse caso, a função f é bijetora com $A = B = \mathbb{R}$. Assim, ela admite uma inversa que é função.

$$f(x) = y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x = y - 2 \Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3} = f^{-1}(y)$$

$$\text{Daí, a inversa da função } f \text{ é a função } f^{-1}: B \subset \mathbb{R} \xrightarrow{y} A \subset \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{3}$$

$$2) f: A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} \quad f(x) = y = (x-1)^2$$

$$f(x) = y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = x-1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y} + 1 = f^{-1}(y)$$

Para essa função, admitir uma inversa que seja função, temos de limitar o domínio. Assim, $f: [1; +\infty) \xrightarrow{x} \mathbb{R}_+ \quad f(x) = y = (x-1)^2$ será bijetora e sua

inversa será a função $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \xrightarrow{y} [1; +\infty) \quad f^{-1}(y) = x = \sqrt{y} + 1$

$$3) f: A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R} \quad f(x) = y = \frac{x}{-x+3}$$

$$f(x) = y = \frac{x}{-x+3} \Leftrightarrow -xy + 3y = x \Leftrightarrow xy + x = 3y. \text{ Colocando } x \text{ em evidência, temos:}$$

$$x(y+1) = 3y \Leftrightarrow x = \frac{3y}{y+1} = f^{-1}(y).$$

$$\text{Assim, } f^{-1}: B \subset \mathbb{R} \xrightarrow{y} A \subset \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = x = \frac{3y}{y+1}$$

Definição: Seja $f^{-1}: B \subset \mathbb{R} \xrightarrow{y} A \subset \mathbb{R} \quad f^{-1}(y) = x$ a função inversa de uma função f . Se trocarmos, nessa função, a variável x por y e a variável y por x , teremos uma nova função, que chamaremos *função simétrica*.

Exemplos:

1) Seja $f^{-1} : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ $\mapsto f^{-1}(y) = x = \frac{y-2}{3}$. A simétrica dessa função é a função

$$g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R} \mapsto g(x) = y = \frac{x-2}{3}.$$

2) Seja $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty)$ $\mapsto f^{-1}(y) = x = \sqrt{y} + 1$. A simétrica dessa função é a função

$$g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty) \mapsto g(x) = y = \sqrt{x} + 1.$$

3) Seja $f^{-1} : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R}$ $\mapsto f^{-1}(y) = x = \frac{3y}{y+1}$. A simétrica dessa função é a função

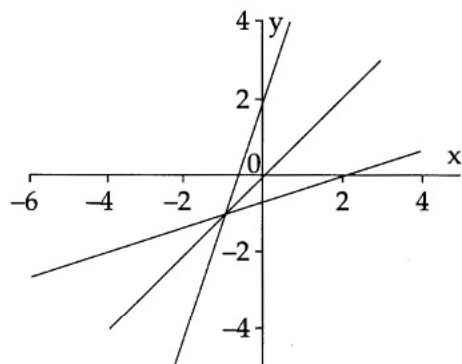
$$g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R} \mapsto g(x) = y = \frac{3x}{x+1}.$$

Observação: Grande parte da literatura chama essa função g de função inversa da função f .

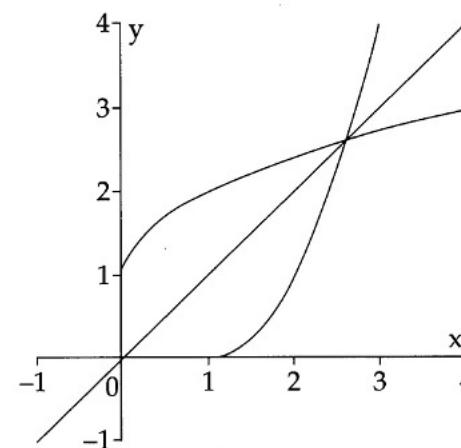
Geometricamente, os gráficos da função f e da função simétrica g são simétricos em relação à reta $f(x) = y = x$.

Exemplos:

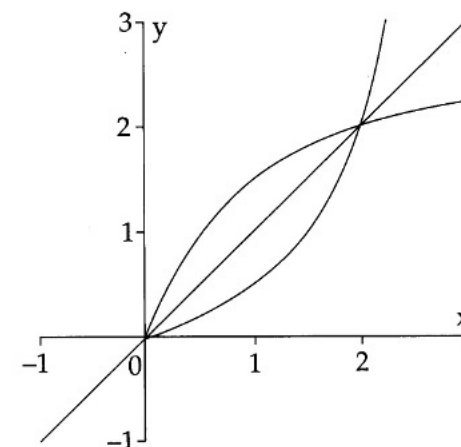
1) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \mapsto f(x) = y = 3x + 2$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R} \mapsto g(x) = y = \frac{x-2}{3}$.



2) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \mapsto f(x) = y = (x-1)^2$ e $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1; +\infty) \mapsto g(x) = y = \sqrt{x} + 1$.



3) $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \mapsto f(x) = y = \frac{x}{-x+3}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow A \subset \mathbb{R} \mapsto g(x) = y = \frac{3x}{x+1}$.



8.8 Função exponencial

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos *função exponencial*

de base a a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \mapsto f(x) = y = a^x$.

Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $x \mapsto f(x)=y$

1) $f(x) = 3^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$

3) $f(x) = 5^x$

4) $f(x) = (\sqrt{5})^x$

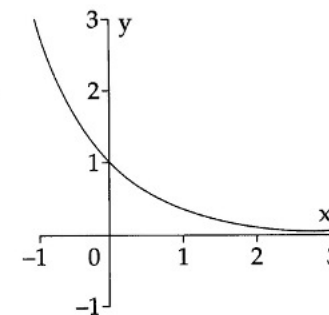
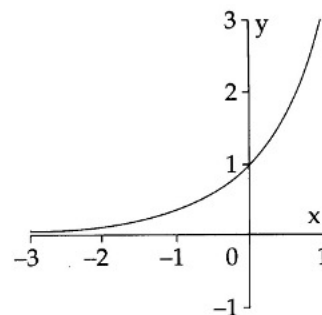
5) $f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

Observações:1) $f(x) = a^x \Rightarrow f(0) = a^0 = 1$, isso significa que o par ordenado $(0; 1)$ pertence a toda função exponencial.2) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Daí, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$ (a função exponencial é estritamente positiva).3) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, temos duas possibilidades: $a > 1$ ou $0 < a < 1$.a) $a > 1$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2). \text{ Daí, } f \text{ é crescente.}$$

b) $0 < a < 1$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \text{ Daí, } f \text{ é decrescente.}$$

4) Na representação gráfica da função exponencial, temos uma reta horizontal assíntota ($y = 0$), que representa o limite inferior da função.Veja, a seguir, os gráficos de $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}_+^*$ e
 $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}_+^* : f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 

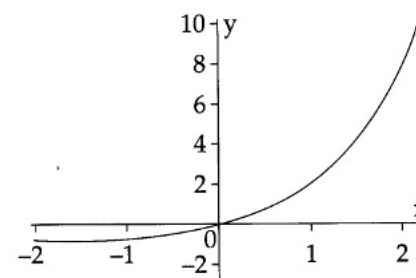
Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $x \mapsto f(x)=y$

1) $f(x) = y = 3^x - 1$

 $D(f) = \mathbb{R}$. Como $3^x > 0$, então $y = 3^x - 1 > -1$, isto é, $\text{Im}(f) = (-1; +\infty)$.A função é crescente, pois $a > 1$.A reta assíntota é a reta $y = -1$.

A seguir, veja o gráfico:

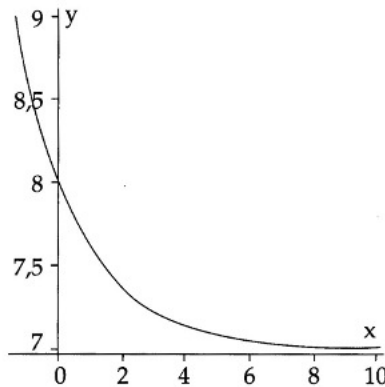


2) $f(x) = y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 7$

 $D(f) = \mathbb{R}$. Como $\left(\frac{3}{5}\right)^x > 0$, então $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 7 > 7$, isto é, $\text{Im}(f) = (7; +\infty)$. A função é decrescente, pois $0 < a < 1$.

A reta assíntota é a reta $y=7$.

A seguir, veja o gráfico:



8.9 Função logarítmica

Definição: Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos *função logarítmica de base a* a função $f : A \subset \mathbb{R}_+^* \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = \log_a x$.

Exemplos:

Seja $f : A \subset \mathbb{R}_+^* \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$.

1) $f(x) = \log_5 x$

3) $f(x) = \log_{10} x = \log x$

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$

4) $f(x) = \log_e x = \ln x$

Observações:

1) $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. O significado dessa expressão é que a função logarítmica e a função exponencial são inversas uma da outra.

2) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f(1) = \log_a 1 = 0$. Isso significa que o par ordenado $(1; 0)$ pertence a toda função logarítmica.

3) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, temos duas possibilidades: $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

a) $a > 1$

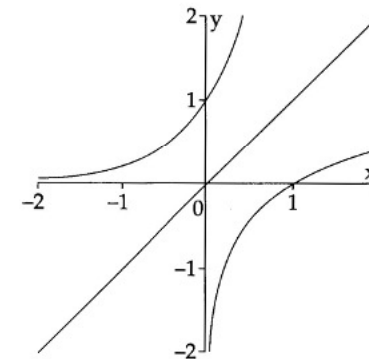
$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Daí, f é crescente.

b) $0 < a < 1$

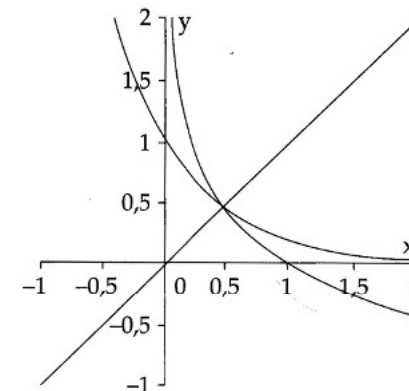
$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Daí, f é decrescente.

4) Na representação gráfica da função logarítmica, temos uma reta vertical assíntota ($x = 0$), que representa o limite esquerdo ou direito da função quando a mesma for decrescente ou crescente, respectivamente.

Observemos os gráficos de $y = \log_5 x$ e $y = 5^x$.



Observe, também, os gráficos de $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

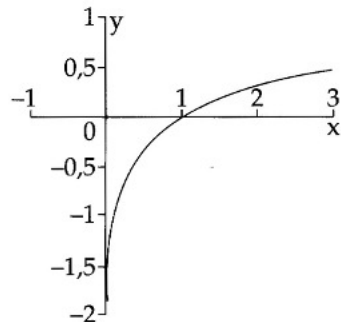


Essas funções são simétricas em relação à reta $y = x$.

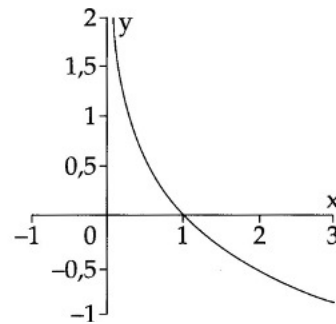
Vejam, a seguir, os gráficos de $f : A \subset \mathbb{R}_+^* \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ e

$$f : A \subset \mathbb{R}_+^* \rightarrow B \subset \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f(x) = y = \log_2 x$$

Os dois gráficos possuem a mesma reta assíntota $x = 0$.



f é crescente, pois $a = 9$.



f é decrescente, pois $a = \frac{2}{7}$.

Exemplos:

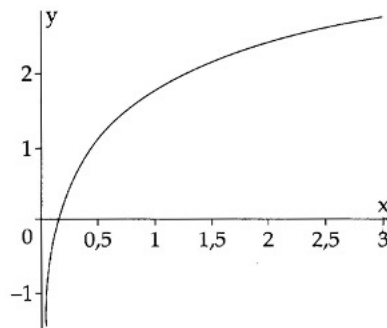
Seja $f : A \subset \mathbb{R}_+^* \rightarrow B \subset \mathbb{R}$.

$$1) f(x) = y = \log_3(7x)$$

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*, \text{ Im}(f) = \mathbb{R}.$$

A função é crescente, pois $a > 1$. A reta assíntota é a reta $x = 0$.

A seguir, vejamos o gráfico:

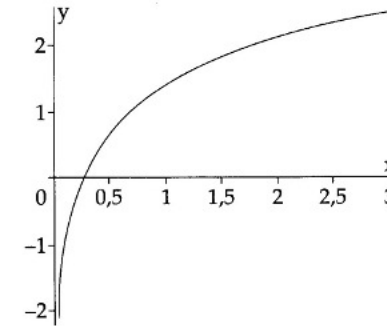


$$2) f(x) = y = \ln(4x)$$

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*, \text{ Im}(f) = \mathbb{R}.$$

A função é crescente, pois $a > 1$. A reta assíntota é a reta $x = 0$.

A seguir, observemos o gráfico:

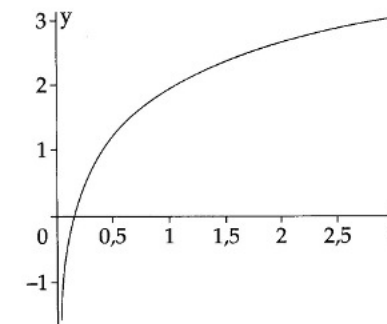


$$3) f(x) = y = \log(7x)$$

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*, \text{ Im}(f) = \mathbb{R}.$$

A função é crescente, pois $a > 1$. A reta assíntota é a reta $x = 0$.

A seguir, vejamos o gráfico:

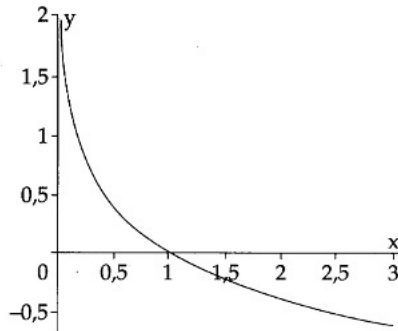


$$4) f(x) = y = \log_{\frac{1}{6}} x$$

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*, \text{ Im}(f) = \mathbb{R}.$$

A função é decrescente, pois $0 < a < 1$. A reta assíntota é a reta $x = 0$.

A seguir, observemos o gráfico:



8.10 Exercícios resolvidos

1) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \frac{5}{4x}$$

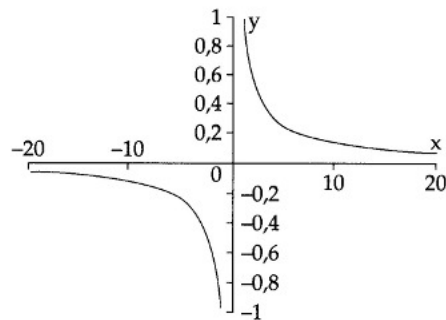
Solução:

Como o denominador não pode ser nulo, determina-se o valor que anula a equação:

$$4x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Assim, $D(f) = \mathbb{R}^*$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

O gráfico é uma hipérbole eqüilátera.



2) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

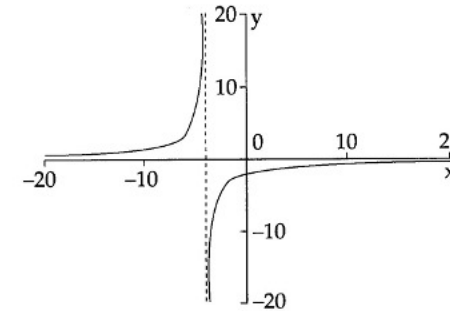
$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \frac{7}{x+4}$$

Solução:

Como o denominador não pode ser nulo, $x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$.

Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{-4\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

O gráfico é uma hipérbole eqüilátera.



3) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

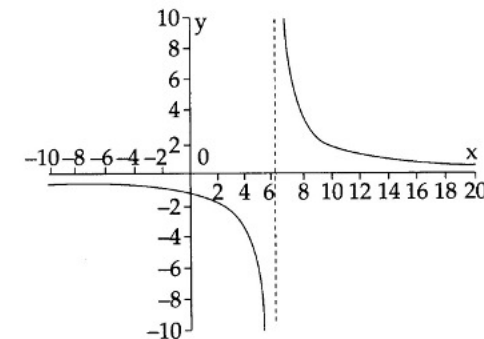
$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \frac{7}{x-6}$$

Solução:

Como o denominador não pode ser nulo, $x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 6$.

Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.

O gráfico é uma hipérbole eqüilátera.



4) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função

$$f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = y = \frac{x}{x+1}$$

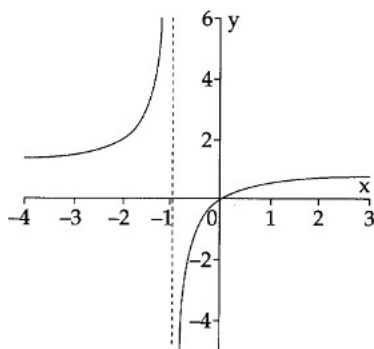
Solução:

Como o denominador não pode ser nulo, $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.

– Além disso, $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.

Assim, $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

O gráfico é uma hipérbole equilátera.



5) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das funções

$$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}:$$

$$x \mapsto f(x) = y$$

a) $f(x) = 3[x]$

b) $f(x) = [-2x]$

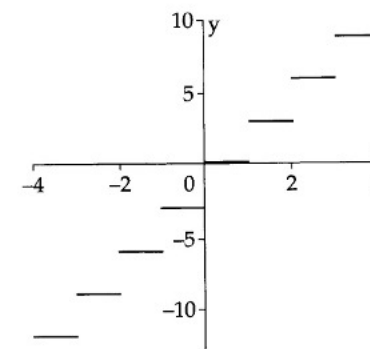
c) $f(x) = |[x]|$

Solução:

a) $f(x) = 3[x]$

x	[x]	y = 3[x]
$-4 \leq x < -3$	-4	-12
$-3 \leq x < -2$	-3	-9
$-2 \leq x < -1$	-2	-6
$-1 \leq x < 0$	-1	-3
$0 \leq x < 1$	0	0
$1 \leq x < 2$	1	3
$2 \leq x < 3$	2	6
$3 \leq x < 4$	3	9

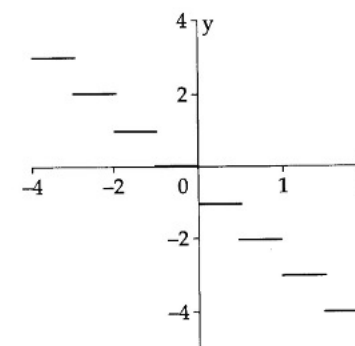
$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \{\dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$$



b) $f(x) = [-2x]$

x	-2x	y = [-2x]
$1,5 < x \leq 2$	$-4 \leq -2x < -3$	-4
$1 < x \leq 1,5$	$-3 \leq -2x < -2$	-3
$0,5 < x \leq 1$	$-2 \leq -2x < -1$	-2
$0 < x \leq 0,5$	$-1 \leq -2x < 0$	-1
$-0,5 < x \leq 0$	$0 \leq -2x < 1$	0
$-1 < x \leq -0,5$	$1 \leq -2x < 2$	1
$-1,5 < x \leq -1$	$2 \leq -2x < 3$	2
$-2 < x \leq -1,5$	$3 \leq -2x < 4$	3

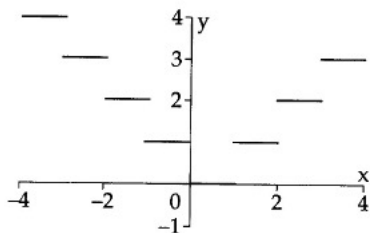
$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{Z}.$$



c) $f(x) = |[x]|$

x	[x]	$y = [x] $
$-4 \leq x < -3$	-4	4
$-3 \leq x < -2$	-3	3
$-2 \leq x < -1$	-2	2
$-1 \leq x < 0$	-1	1
$0 \leq x < 1$	0	0
$1 \leq x < 2$	1	1
$2 \leq x < 3$	2	2
$3 \leq x < 4$	3	3

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}_+$.



6) Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto f(x)=y_1} B \subset \mathbb{R}$ e $g : C \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto g(x)=y_2} D \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e a expressão que representa $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

a) $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = 4x - 2$.

b) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $g(x) = x - 4$.

c) $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -3x + 5$.

d) $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = |x| + 7$.

e) $f(x) = |x + 3| - 3$ e $g(x) = \frac{x}{2}$.

f) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

g) $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 1$.

h) $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ e $g(x) = 2x^2$.

Solução:

a) $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = 4x - 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x - 2) = (-2)(4x - 2) + 1 = -8x + 4 + 1 = -8x + 5$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-2x + 1) = 4(-2x + 1) - 2 = -8x + 4 - 2 = -8x + 2$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $g(x) = x - 4$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 4) = \frac{x - 4}{2} + 1 = \frac{x - 4 + 2}{2} = \frac{x - 2}{2}$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \left(\frac{x}{2} + 1\right) - 4 = \frac{x}{2} - 3$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = -3x + 5$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-3x + 5) = 3(-3x + 5) - 1 = -9x + 15 - 1 = -9x + 14$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = -3(3x - 1) + 5 = -9x + 3 + 5 = -9x + 8$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = 2x + 4$ e $g(x) = |x| + 7$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(|x| + 7) = 2(|x| + 7) + 4 = 2|x| + 18$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f \circ g) = [18; +\infty)$, pois $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 4) = |2x + 4| + 7$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(g \circ f) = [7; +\infty), \text{ pois } |2x + 4| \geq 0.$$

e) $f(x) = |x + 3| - 3$ e $g(x) = \frac{x}{2}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \left|\frac{x}{2} + 3\right| - 3$$

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f \circ g) = [-3; +\infty), \text{ pois } \left|\frac{x}{2} + 3\right| \geq 0$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x + 3| - 3) = \frac{|x + 3| - 3}{2}$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(g \circ f) = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right), \text{ pois } |x + 3| \geq 0$$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 4$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 4) = \sqrt{x^2 - 4}$$

$D(f \circ g)$ é formado pelos valores de x que satisfazem a inequação $x^2 - 4 \geq 0$.

Como foi visto no capítulo anterior, $x^2 - 4 \geq 0$ quando $x \leq -2$ ou $x \geq 2$.

$$\text{Daí, } D(f \circ g) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty) \text{ e } \text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}_+.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 4 = x - 4; x \geq 0$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R}_+ \text{ e } \text{Im}(g \circ f) = [-4; +\infty).$$

g) $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 1$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 4 = x + 3$$

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 4) = (x + 4) - 1 = x + 3$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}.$$

h) $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ e $g(x) = 2x^2$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2) = \frac{1}{4(2x^2) - 1} = \frac{1}{8x^2 - 1}$$

$D(f \circ g)$ é formado pelos valores de x que satisfazem a inequação $8x^2 - 1 > 0$, pois o denominador não pode ser nulo.

Como foi visto no capítulo anterior, $8x^2 - 1 > 0$ quando

$$x < -\frac{1}{\sqrt{8}} \text{ ou } x > \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

$$\text{Daí, } D(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{\sqrt{8}}; \frac{1}{\sqrt{8}}\right\} \text{ e } \text{Im}(f \circ g) = (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{4x-1}\right) = 2\left(\frac{1}{4x-1}\right)^2 = \frac{2}{(4x-1)^2}$$

$D(f \circ g)$ é formado pelos valores de x que satisfazem a equação

$$4x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{4}, \text{ pois o denominador não pode ser nulo.}$$

$$\text{Daí, } D(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\} \text{ e } \text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}_+^*.$$

7) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto f(x)=y} B \subset \mathbb{R}$, determine o domínio e a imagem da função e sua função simétrica:

a) $f(x) = x + 3$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

b) $f(x) = 4x - 1$

e) $f(x) = 2x + 5$

c) $f(x) = 3x + \frac{2}{3}$

f) $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$

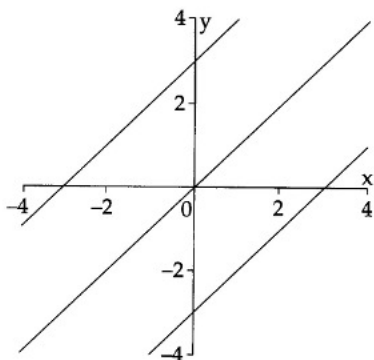
Solução:

a) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y = x + 3$, se isolarmos o x , temos:

$$y = x + 3 \Leftrightarrow x = y - 3 = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = x - 3$.

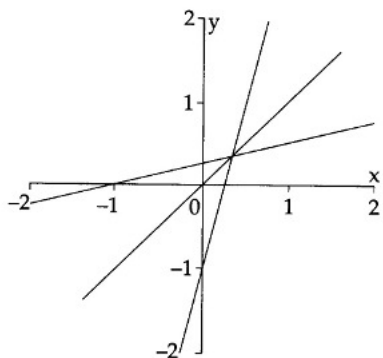


b) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y = 4x - 1$, se isolarmos o x , temos:

$$y = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{4} = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = \frac{x+1}{4}$.

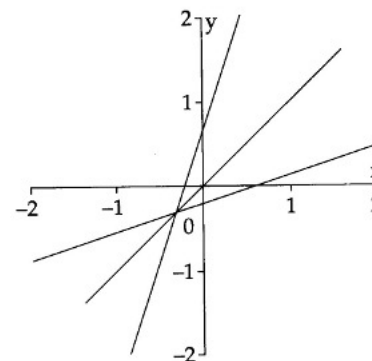


c) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y = 3x + \frac{2}{3}$, se isolarmos o x , temos:

$$y = 3x + \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = y - \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{y}{3} - \frac{2}{9} = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = \frac{x}{3} - \frac{2}{9}$.



d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y = \frac{x-1}{x+2}$, se isolarmos o x , temos:

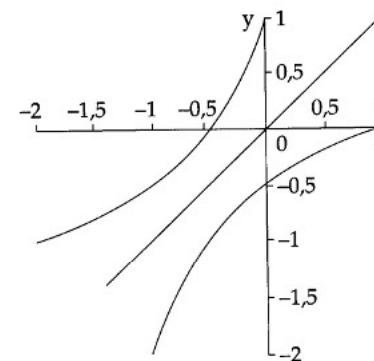
$$y = \frac{x-1}{x+2} \Leftrightarrow xy + 2y = x - 1 \Leftrightarrow xy - x = -2y - 1. \text{ Multiplicando por } (-1),$$

temos:

$$xy - x = -2y - 1 \Leftrightarrow x - xy = 2y + 1. \text{ Colocando } x \text{ em evidência, temos:}$$

$$x - xy = 2y + 1 \Leftrightarrow x(1 - y) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{1-y} = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = \frac{2x+1}{1-x}$.

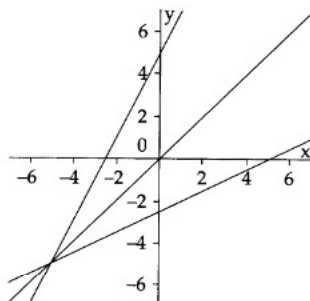


e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Como $f(x) = y = 2x + 5$, se isolarmos o x , temos:

$$y = 2x + 5 \Leftrightarrow 2x = y - 5 \Leftrightarrow x = \frac{y}{2} - \frac{5}{2} = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2}$.



f) $D(f)$ é formado pelos valores de x que satisfazem a inequação $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$. Daí,

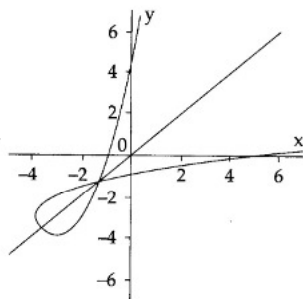
$$D(f) = [-4; +\infty) \text{ e } \text{Im}(f) = [-3; +\infty), \text{ pois } \sqrt{x+4} \geq 0, \forall x \geq -4.$$

Como $f(x) = y = \sqrt{x+4} - 3$, se isolarmos o x , temos:

$$y = \sqrt{x+4} - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x+4} = y + 3. \text{ Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, temos:}$$

$$(\sqrt{x+4})^2 = (y+3)^2 \Leftrightarrow x+4 = (y+3)^2 \Leftrightarrow x = (y+3)^2 - 4 = f^{-1}(y), \text{ que é a inversa de } f.$$

Daí, a função simétrica é $g(x) = y = (x+3)^2 - 4$.



8) Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} B \subset \mathbb{R}$ e $g : C \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} D \subset \mathbb{R}$. Determinar $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ e suas funções inversa e simétrica:

a) $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 1$

b) $f(x) = \frac{3}{x} - 4$ e $g(x) = x - 3$

c) $f(x) = x + 7$ e $g(x) = -\frac{x}{2} - 8$

Solução:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 2 = x + 1 = y$.

Isolando o x , temos:

$$x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = x = y - 1 \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = x - 1 \text{ (simétrica)}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2) = (x + 2) - 1 = x + 1 = y$$

Isolando o x , temos:

$$x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y) = x = y - 1 \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = x - 1 \text{ (simétrica)}$$

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = \frac{3}{x-3} - 4 = y$

Isolando o x , temos:

$$\frac{3}{x-3} - 4 = y \Rightarrow \frac{3}{x-3} = y + 4 \Rightarrow 3 = (x-3)(y+4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 3 = \frac{3}{y+4} \Rightarrow x = \frac{3}{y+4} + 3$$

$$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = x = \frac{3}{y+4} + 3 \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = \frac{3}{x+4} + 3. \text{ Para isolarmos o } x, \text{ primeiro faremos o m.m.c.:}$$

$$y = \frac{3}{x+4} + 3 = \frac{3+3x+12}{x+4} = \frac{3x+15}{x+4} \text{ (simétrica)}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3}{x} - 4\right) = \left(\frac{3}{x} - 4\right) - 3 = \frac{3}{x} - 7 = y$$

Isolando o x , temos:

$$\frac{3}{x} - 7 = y \Rightarrow \frac{3}{x} = y + 7 \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{1}{y+7} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y) = x = \frac{3}{y+7} \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = \frac{3}{x+7} \text{ (simétrica)}$$

$$c) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{x}{2} - 8\right) = -\frac{x}{2} - 8 + 7 = -\frac{x}{2} - 1 = y$$

Isolando o x , temos:

$$-\frac{x}{2} - 1 = y. \text{ Multiplicando essa equação por } (-1), \text{ temos:}$$

$$\frac{x}{2} + 1 = -y \Rightarrow \frac{x}{2} = -y - 1 \Rightarrow x = -2y - 2$$

$$(f \circ g)^{-1}(y) = x = -2y - 2 \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = -2x - 2 \text{ (simétrica)}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+7) = -\frac{x+7}{2} - 8 = \frac{-x-7-16}{2} = \frac{-x-23}{2} = y$$

Isolando o x , temos:

$$\frac{-x-23}{2} = y \Rightarrow -x-23 = 2y \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(y) = x = -2y - 23 \text{ (inversa)}$$

$$s(x) = y = -2x - 23 \text{ (simétrica)}$$

b) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico:

$$i) f(x) = y = 7^x$$

$$g) f(x) = y = 5 + 5^{\frac{x}{2}}$$

$$j) f(x) = y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$$

$$h) f(x) = y = 12 - 4 \cdot (3^{0,1x})$$

$$k) f(x) = y = 2^{2x}$$

$$i) f(x) = y = e^{-3x} + 4$$

$$l) f(x) = y = 2^{-3x}$$

$$j) f(x) = y = -3 + 4e^{\frac{-3x}{2}}$$

$$m) f(x) = y = 2 \cdot (4^x)$$

$$k) f(x) = y = e^{2x+1} + 1$$

$$n) f(x) = y = 2 \cdot (4^{-x})$$

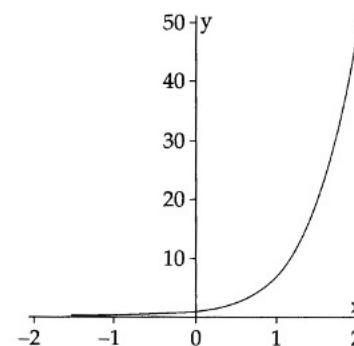
Solução:

a) Como $a > 1$ e o expoente é positivo, a função é crescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$\frac{1}{49}$
-1	$\frac{1}{7}$
0	1
1	7
2	49

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Gráfico:

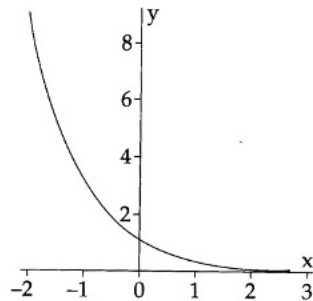


b) Como $0 < a < 1$ e o expoente é positivo, a função é decrescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico:

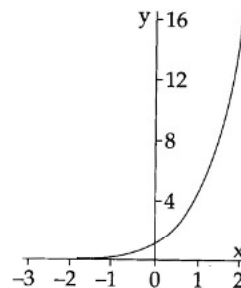


- c) Como $a > 1$ e o expoente é positivo, a função é crescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico:

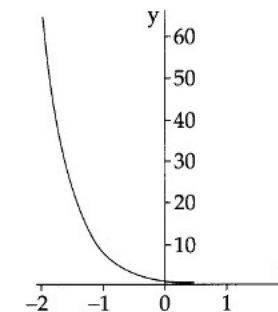


- d) Como $a > 1$ e o expoente é negativo, a função é decrescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	64
-1	8
0	1
1	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{64}$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico:

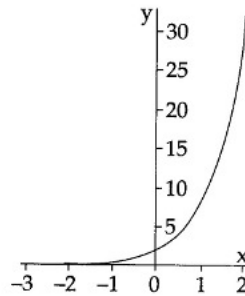


- e) Como $a > 1$ e o expoente é positivo, a função é crescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	2
1	8
2	32

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico:

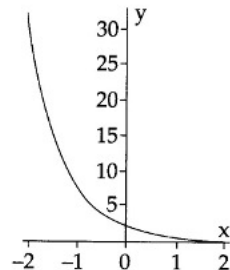


- f) Como $a > 1$ e o expoente é negativo, a função é decrescente. A assíntota horizontal é o eixo x . Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	32
-1	8
0	2
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{8}$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*.$$

Gráfico:

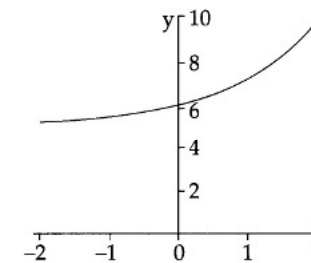


- g) Como $a > 1$ e o expoente é positivo fracionário, a função é crescente. A assíntota horizontal é $x = 5$. Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$\frac{26}{5}$
-1	$5 + \frac{1}{\sqrt{5}}$
0	6
1	$5 + \sqrt{5}$
2	10

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (5; +\infty).$$

Gráfico:

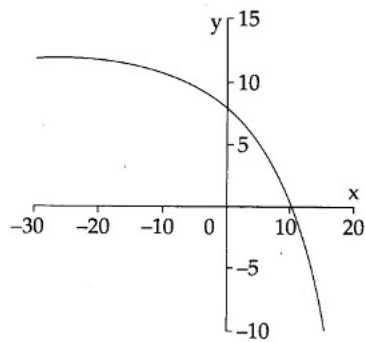


- h) Como $a > 1$ e o expoente é positivo fracionário, a função é crescente, mas quando multiplicada por (-4) , torna-se uma função decrescente. A assíntota horizontal é $x = 12$. Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-10	$\frac{32}{3}$
0	8
10	0

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (-\infty; 12).$$

Gráfico:



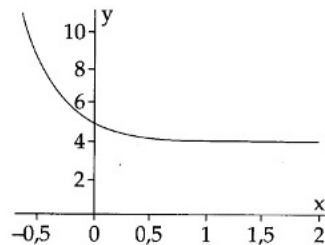
- i) e é um número irracional, de grande importância em cursos que utilizam o cálculo, e vale, aproximadamente, 2,7182818...

Como $a > 1$ e o expoente é negativo, a função é decrescente. A assíntota horizontal é $x = 4$. Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$e^6 + 4 \approx 407,43$
0	5
2	$e^{-6} + 4 \approx 4,002$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (4; +\infty).$$

Gráfico:

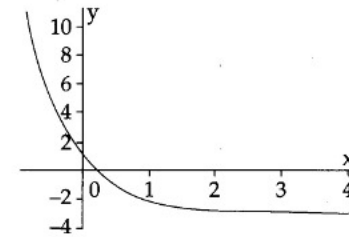


- j) Como $a > 1$ e o expoente é negativo, a função é decrescente. A assíntota horizontal é $x = -3$. Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-2	$-3 + 4e^3 \approx 77,34$
0	1
2	$-3 + 4e^{-3} \approx -2,801$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (-3; +\infty).$$

Gráfico:

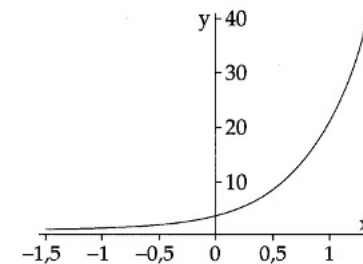


- k) Como $a > 1$ e o expoente é positivo, a função é crescente. A assíntota horizontal é $x = 1$. Para traçar a curva, podemos fazer a tabela:

x	y
-1	$e^{-1} + 1 \approx 1,37$
0	$e + 1 \approx 3,72$
1	$e^3 + 1 \approx 21,09$

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } \text{Im}(f) = (1; +\infty).$$

Gráfico:



10) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico:

- a) $f(x) = y = \log(3x+4)$ f) $f(x) = y = -3\ln(2x+1)$
 b) $f(x) = y = \log_{\frac{1}{3}}(3x+6)$ g) $f(x) = y = -4\log(4x-3)$
 c) $f(x) = y = \ln(x+4)$ h) $f(x) = y = 3 + \log(5x-7)$
 d) $f(x) = y = \log_{\frac{1}{3}}(2x-3)$ i) $f(x) = y = -4 + \log(3x-1)$
 e) $f(x) = y = -\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$ j) $f(x) = y = 2 + 3\log(2x+5)$
 k) $f(x) = y = 3 + 4\ln|5x+7|$

Solução:

a) Base $a = 10 > 1 \Rightarrow$ função crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

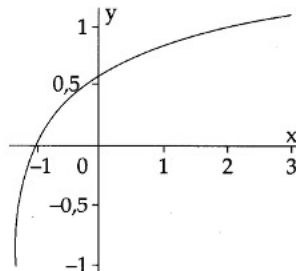
$$3x+4=0 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$3x+4 > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$$

x	y
-1	0
2	1

$$D(f) = \left(-\frac{4}{3}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



b) Base $0 < a = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ função decrescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

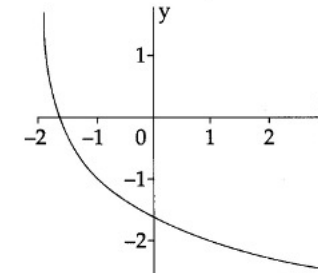
$$3x+6=0 \Rightarrow x = -2.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$3x+6 > 0 \Rightarrow x > -2.$$

x	y
$-\frac{5}{3}$	0
$-\frac{17}{3}$	1

$$D(f) = \left(-\frac{5}{3}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



c) Base $a = e > 1 \Rightarrow$ função crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

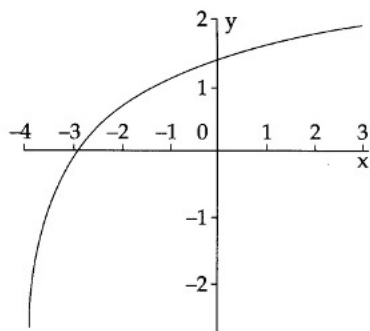
$$x+4=0 \Rightarrow x = -4.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$x+4 > 0 \Rightarrow x > -4$$

x	y
-3	0
$e-4$	1

$$D(f) = (-4; +\infty) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- d) Base $0 < a = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$ função decrescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

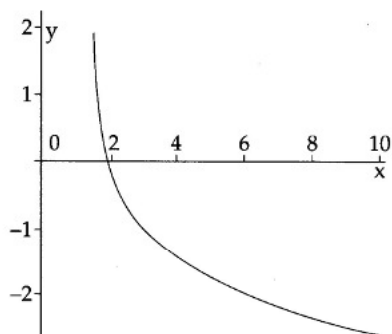
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$2x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{2}.$$

x	y
2	0
$\frac{5}{3}$	1

$$D(f) = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- e) Base $0 < a = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ função decrescente. Mas ela está multiplicada por (-1) . Logo, ela é crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

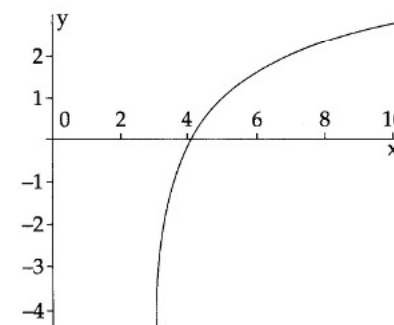
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3.$$

x	y
4	0
$\frac{7}{2}$	1

$$D(f) = (3; +\infty) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- f) Base $a = e > 1 \Rightarrow$ função crescente. Mas ela está multiplicada por (-1) . Logo, ela é decrescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

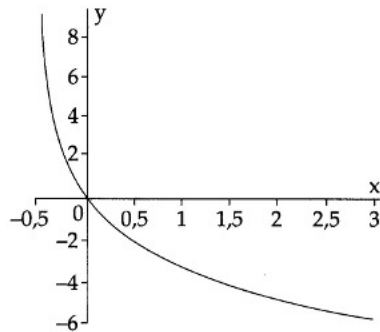
$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}.$$

x	y
0	0
$\frac{e-1}{2}$	1

$$D(f) = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- j) Base $a = 10 > 1 \Rightarrow$ função crescente. Mas ela está multiplicada por (-1) . Logo, ela é decrescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

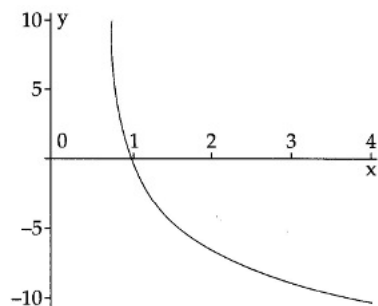
$$4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$4x - 3 > 0 \Rightarrow x > \frac{3}{4}.$$

x	y
1	0
$\frac{13}{4}$	-4

$$D(f) = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- h) Base $a = 10 > 1 \Rightarrow$ função crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

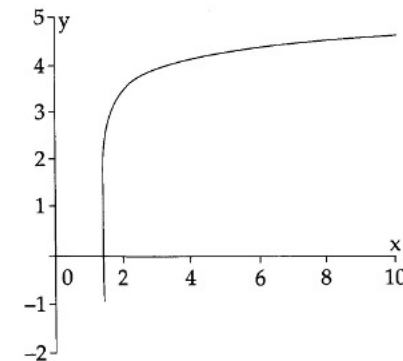
$$5x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{5}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$5x - 7 > 0 \Rightarrow x > \frac{7}{5}.$$

x	y
$\frac{8}{5}$	3
$\frac{17}{5}$	4

$$D(f) = \left(\frac{7}{5}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



- i) Base $a = 10 > 1 \Rightarrow$ função crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

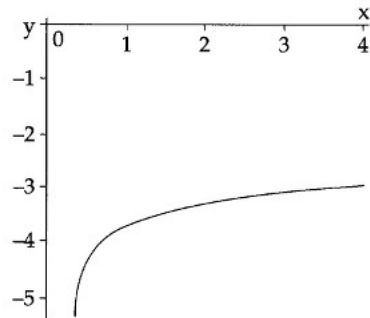
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$3x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}.$$

x	y
-2	2
$\frac{5}{2}$	5

$$D(f) = \left(\frac{1}{3}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



j) Base $a = 10 > 1 \Rightarrow$ função crescente.

Determinaremos a assíntota vertical:

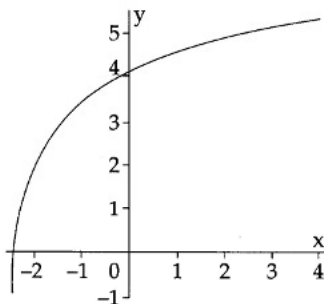
$$2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}.$$

x	y
-2	2
$\frac{5}{2}$	5

$$D(f) = \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$



k) Base $a = e > 1 \Rightarrow$ função crescente.

$$|5x+7| = \begin{cases} 5x+7 & \text{se } 5x+7 \geq 0 \\ -(5x+7) & \text{se } 5x+7 < 0 \end{cases}$$

$$|5x+7| = \begin{cases} 5x+7 & \text{se } x \geq -\frac{7}{5} \\ -5x-7 & \text{se } x < -\frac{7}{5} \end{cases}$$

$$1^{\text{a}} \text{ caso: } x \geq -\frac{7}{5}$$

$$f_1(x) = y_1 = 3 + 4 \cdot \ln(5x+7)$$

Determinaremos a assíntota vertical:

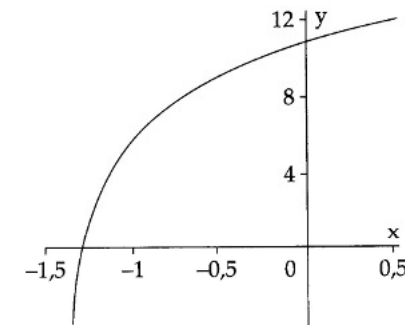
$$5x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{5}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$5x+7 > 0 \Rightarrow x > -\frac{7}{5}.$$

x	y
$-\frac{6}{5}$	3
$\frac{e-7}{5}$	7

$$D(f_1) = \left(-\frac{7}{5}; +\infty\right) \text{ e } \text{Im}(f_1) = \mathbb{R}.$$



2º caso: $x < -\frac{7}{5}$

$$f_2(x) = y_2 = 3 + 4 \cdot \ln(-5x - 7)$$

Determinaremos a assíntota vertical:

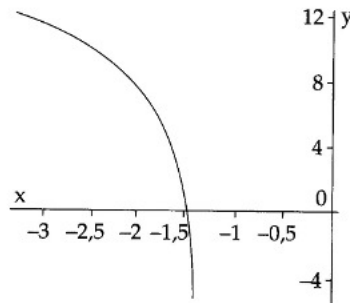
$$5x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{5}.$$

Determinaremos o domínio da função:

$$-5x - 7 > 0 \Rightarrow x < -\frac{7}{5}.$$

x	y
$-\frac{5}{5}$	3
$-\frac{e-7}{5}$	7

$$D(f_2) = \left(-\infty; \frac{7}{5}\right) \text{ e } \text{Im}(f_2) = \mathbb{R}.$$



11 Exercícios propostos

1) Esboce os gráficos das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, determinando seu domínio e imagem e verificando se é função par ou ímpar:

a) $f(x) = -x^3$

b) $f(x) = |x^3|$

2) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = \frac{3}{x+9}$.

3) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y = \frac{9}{x+7}$.

4) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$:

a) $f(x) = \frac{x+5}{x+3}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$

b) $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$

5) Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x) = y$:

a) $f(x) = (-2)[x]$

c) $f(x) = [x-1]$

b) $f(x) = [4x]$

d) $f(x) = x - [x]$

6) Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ e $g : C \subset \mathbb{R} \rightarrow D \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e a expressão que representa $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$:

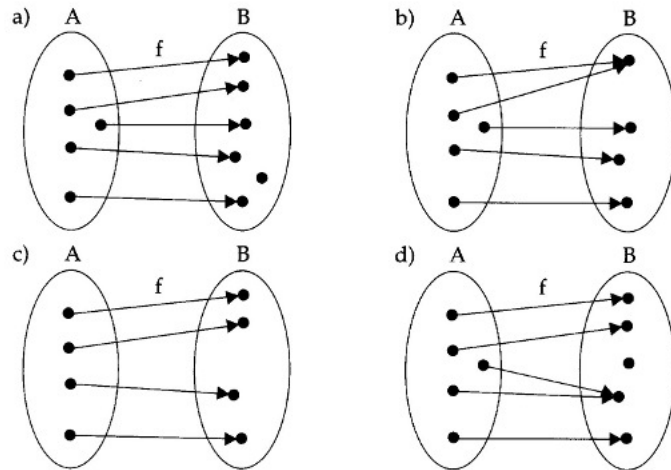
a) $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x - 1$.

c) $f(x) = 4x - 1$ e $g(x) = -x + 3(x)$.

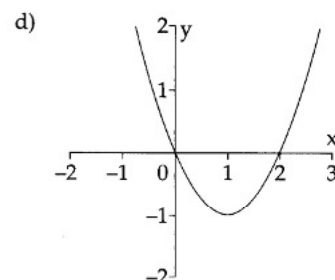
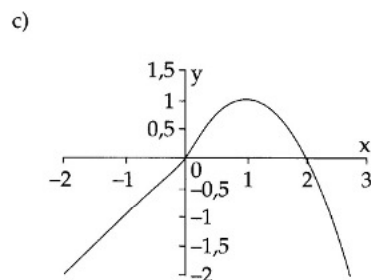
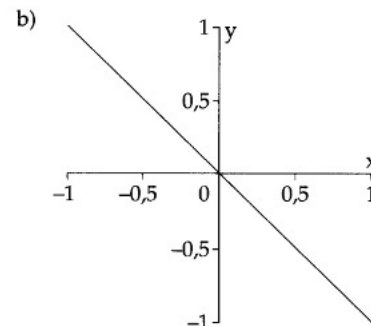
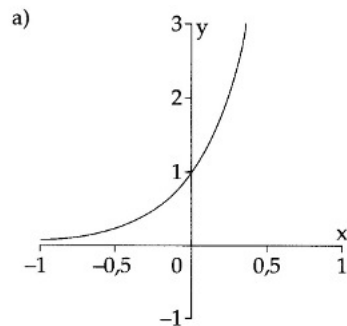
b) $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 3x + x^2$.

d) $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 36$.

7) Determine se cada uma das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ a seguir é injetora, sobrejetora ou bijetora:



- 8) Determine se cada uma das funções $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ a seguir é injetora, sobrejetora ou bijetora:



- 9) Dada a função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x)=y$, determine a função simétrica:

a) $f(x) = \frac{3x+4}{2}$ d) $f(x) = \frac{-6x+\frac{3}{2}}{3}$
 b) $f(x) = -7x + \frac{3}{2}$ e) $f(x) = \frac{\frac{4}{5}-7x}{8}$
 c) $f(x) = \frac{x^2+3}{5}$

- 10) Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x)=y_1$ e $g : C \subset \mathbb{R} \rightarrow D \subset \mathbb{R}$, $g(x)=y_2$. Determinar $(f \circ g)(x)$ e sua função simétrica:

a) $f(x) = \frac{3x+4}{2}$ e $g(x) = x-3$
 b) $f(x) = -x + \frac{3}{2}$ e $g(x) = 2x-4$
 c) $f(x) = \sqrt{x-5}$ e $g(x) = x+7$
 d) $f(x) = 4x-9$ e $g(x) = x^2+4$
 e) $f(x) = \frac{x^2+3}{5}-1$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$

- 11) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, $f(x)=y$. Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico:

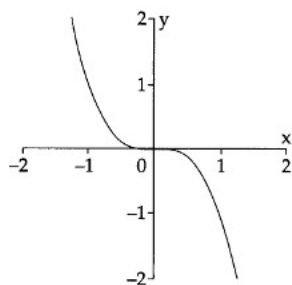
a) $f(x) = y = 9^x$ g) $f(x) = y = -8 + (2)^{\frac{x}{2}}$
 b) $f(x) = y = \left(\frac{8}{3}\right)^x$ h) $f(x) = y = -2 + (2)^{0,1x}$
 c) $f(x) = y = 6^{2x}$ i) $f(x) = y = e^{-9x} - 3$
 d) $f(x) = y = 5^{-3x}$ j) $f(x) = y = \frac{3}{7} - 4e^{\frac{-3x}{2}}$
 e) $f(x) = y = 4 \cdot (7^x)$ k) $f(x) = y = e^{6x-5} + 3$
 f) $f(x) = y = 3 \cdot (3^{-x})$

12) Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$. Determine o domínio, a imagem e esboce o gráfico:

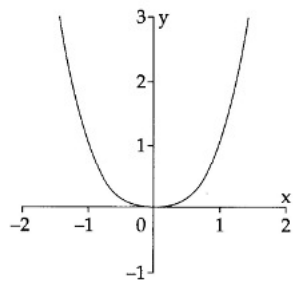
- a) $f(x) = y = \log(5x+7)$ g) $f(x) = y = -5 \cdot \ln(4x+5)$
 b) $f(x) = y = \log_{\frac{1}{5}}(3x-7)$ h) $f(x) = y = 5 \cdot \log(2x-3)$
 c) $f(x) = y = \ln(6x-7)$
 d) $f(x) = y = \log_{\frac{3}{7}}(-6x-3)$ i) $f(x) = y = 5 + \log(4x-3)$
 e) $f(x) = y = \log(9x+10)$ j) $f(x) = y = -4 + \log(5x+9)$
 f) $f(x) = y = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(7x-3)$ k) $f(x) = y = -7 + 8 \cdot \log(3x+2)$

8.12 Respostas dos exercícios propostos

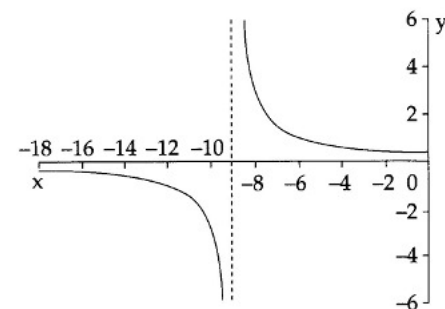
1) a) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, função ímpar.



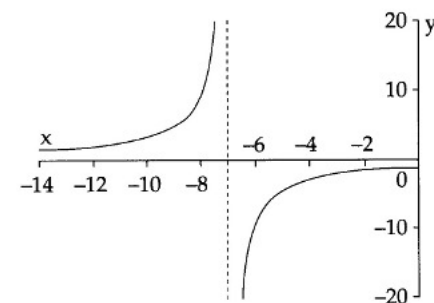
b) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$, função par.



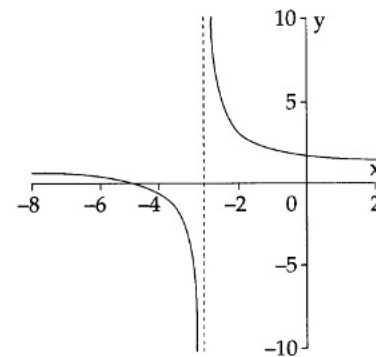
2) $D(f) = \mathbb{R} - \{-9\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$.



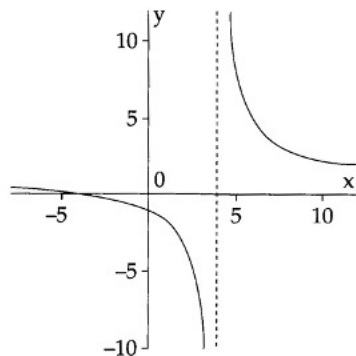
3) $D(f) = \mathbb{R} - \{-7\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^+$.



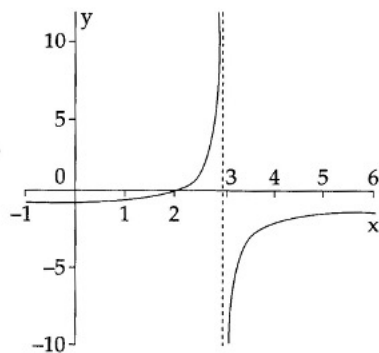
4) a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.



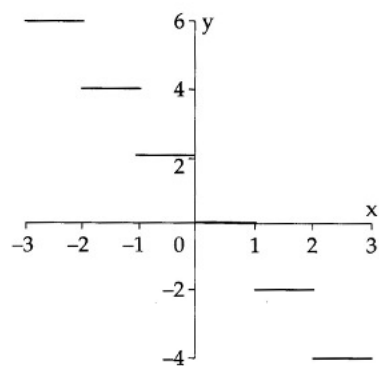
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{4\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.



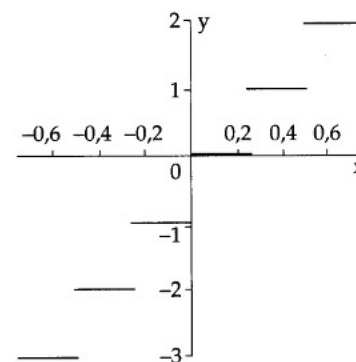
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.



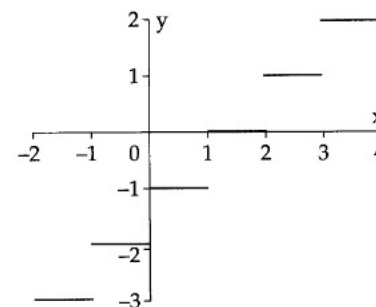
5) a) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$.



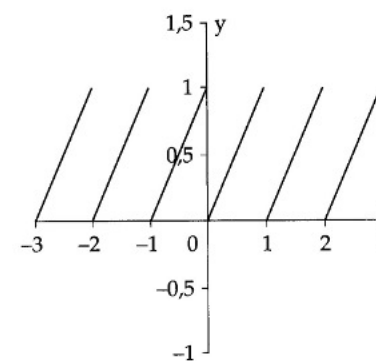
b) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$.



c) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$.



d) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = [0; 1)$.



- 6) a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x + 3$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x + 3$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$
- b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3x^2 + 9x - 2$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 9x - 6$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$
- c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = -4x + 11$; $D(f \circ g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -4x + 4$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}$
- d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 36}$; $D(f \circ g) = (-\infty; -6] \cup [6; +\infty)$; $\text{Im}(f \circ g) = \mathbb{R}_+$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x - 36$; $D(g \circ f) = \mathbb{R}_+$; $\text{Im}(g \circ f) = [-36; +\infty)$

- 7) a) injetora
 b) sobrejetora
- c) bijetora
 d) nem injetora nem sobrejetora
- 8) a) injetora
 b) bijetora
- c) nem injetora nem sobrejetora
 d) nem injetora nem sobrejetora

9) a) $s(x) = \frac{2x-4}{3}$

b) $s(x) = \frac{3-2x}{14}$

c) $s(x) = \sqrt{5x-3}$; $x \geq \frac{3}{5}$

d) $s(x) = \frac{1-2x}{4}$

e) $s(x) = \frac{4}{35} - \frac{8x}{7}$

10) a) $y = \frac{2x+5}{3}$

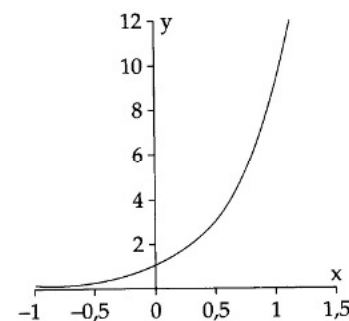
b) $y = \frac{-2x+11}{4}$

c) $y = x^2 - 2$

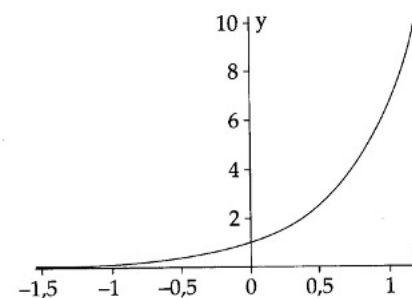
d) $y = \sqrt{\frac{x-7}{4}}$

e) $y = 5x + 4$

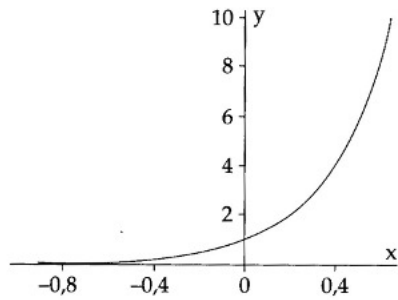
11) a) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



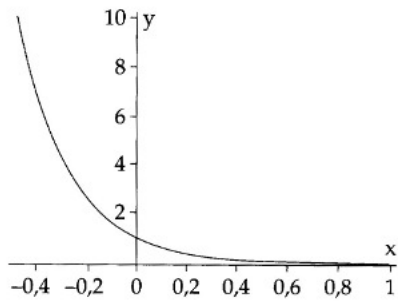
b) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



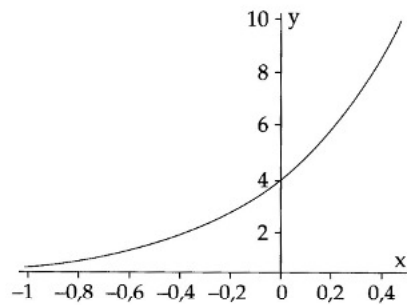
c) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



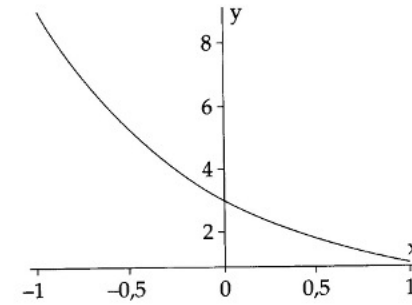
d) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



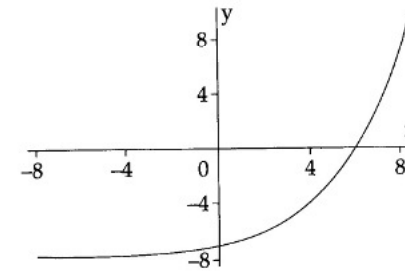
e) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



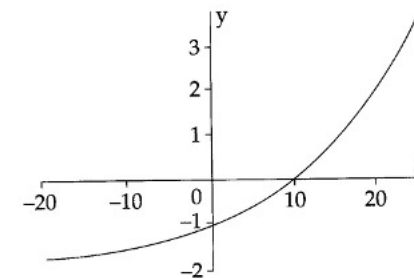
f) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.



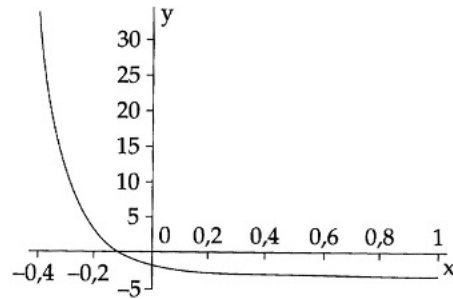
g) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = (-8; +\infty)$.



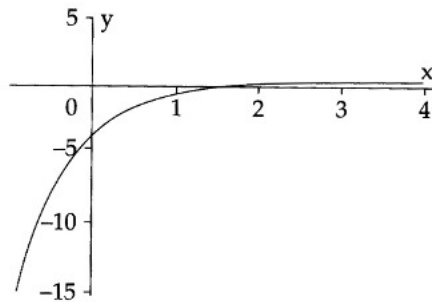
h) $D(f) = \mathbb{R}, \text{Im}(f) = (-2; +\infty)$.



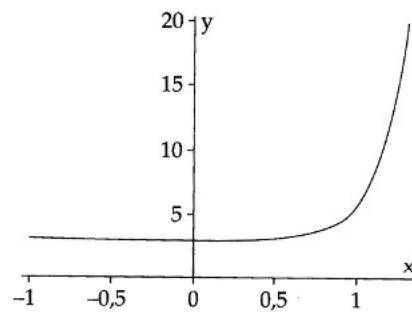
i) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = (-3; +\infty)$.



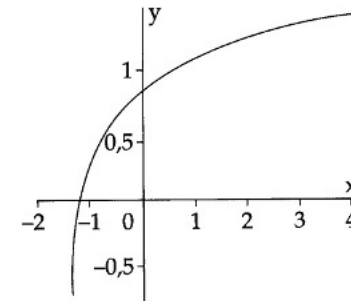
j) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = (-\infty; \frac{3}{7})$.



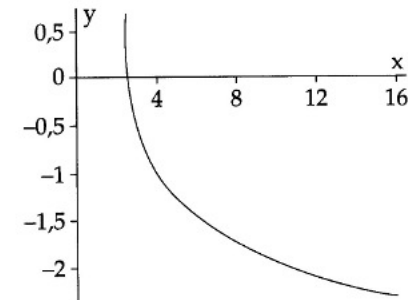
k) $D(f) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(f) = (3; +\infty)$.



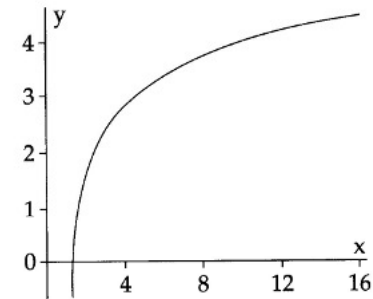
12) a) $D(f) = (-\frac{7}{5}; +\infty)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



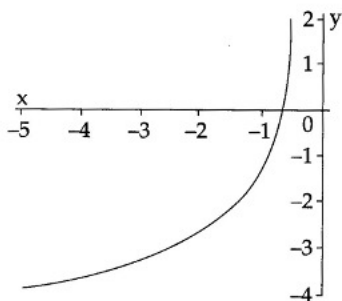
b) $D(f) = (\frac{7}{3}; +\infty)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



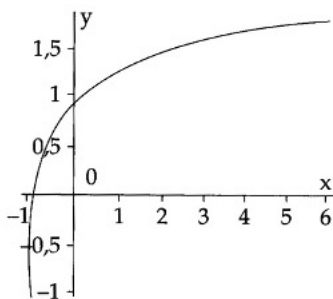
c) $D(f) = (\frac{7}{6}; +\infty)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



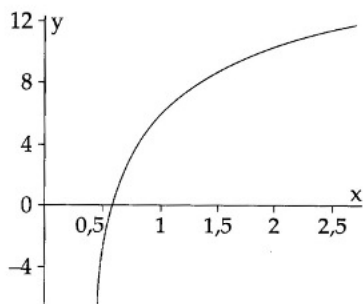
d) $D(f) = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



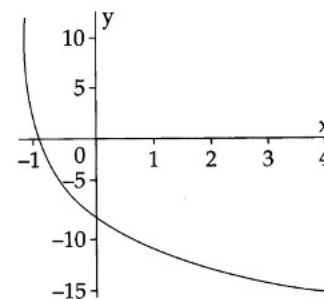
e) $D(f) = \left(-\frac{10}{9}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



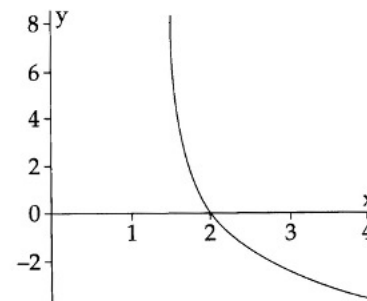
f) $D(f) = \left(\frac{3}{7}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



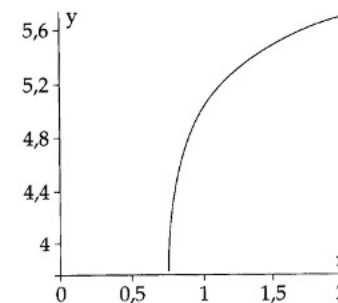
g) $D(f) = \left(-\frac{5}{4}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



h) $D(f) = \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

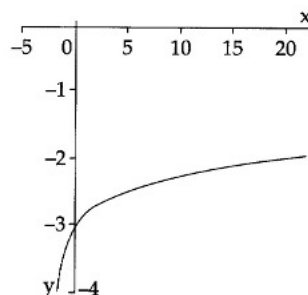


i) $D(f) = \left(\frac{3}{4}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

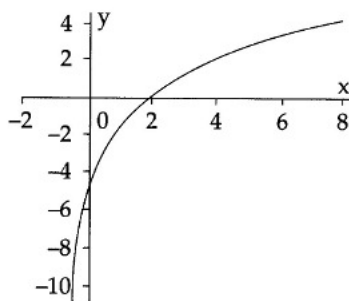


Trigonometria

j) $D(f) = \left(-\frac{9}{5}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



k) $D(f) = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



Neste capítulo, serão estudadas as funções trigonométricas, as relações fundamentais entre elas e as funções trigonométricas inversas. Também serão exploradas as construções dos gráficos dessas funções.

9.1 Introdução

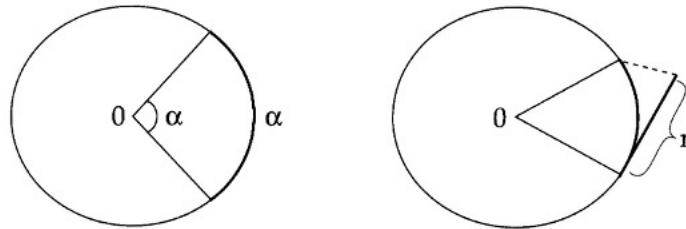
A palavra trigonometria vem do grego (*tri*+*gonos*+*metron*, que significa três+ângulos+medida) e nos remete ao estudo dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos.

Os primeiros estudos sobre o assunto são muito antigos. Hiparco, um grande astrônomo e matemático grego, já no século II a.C., lança alguns fundamentos de trigonometria ao construir tabelas de números para cálculos astronômicos, equivalentes às tábuas de senos (que veremos neste capítulo). Somente no século XVIII, o matemático suíço Euler conseguiu desvincular a trigonometria da astronomia, transformando-a em um ramo independente na matemática.

9.2 Arcos e ângulos

Seja uma circunferência de centro em 0 e raio r . α é chamado *ângulo central* e tem a mesma medida do arco de circunferência que ele determina.

Sendo assim, verificamos que a circunferência toda mede 360° .



Podemos, então, definir:

Definições:

- i) *Grau* ($^{\circ}$) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.
- ii) *Radiano* (rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido, isto é, corresponde a $\frac{1}{2\pi}$ da circunferência.
- iii) *Grado* (gr) é um arco unitário igual a $\frac{1}{400}$ da circunferência.

Logo, um ângulo pode ser medido em graus ou radianos. Como existem 2π radianos em um círculo (lembre-se de que o comprimento de uma circunferência é igual a $2\pi r$), temos as seguintes relações:

$$2\pi = 360^{\circ}; \pi = 180^{\circ}; \frac{\pi}{2} = 90^{\circ}; \text{ e assim sucessivamente.}$$

π é um número irracional cujo valor é 3,14159...)

Podemos então, por meio de uma simples regra de três, exprimir qualquer ângulo em radianos e vice-versa.

Exemplos:

- i) Vamos exprimir 160° em radianos:

$$180^{\circ} \text{ — } \pi \text{ rad}$$

$$160^{\circ} \text{ — } x \text{ rad}$$

$$\text{Daí, } x = \frac{160 \cdot \pi}{180} = \frac{8\pi}{9} \text{ rad.}$$

- 2) Vamos exprimir $\frac{5\pi}{6}$ rad em graus:

$$180^{\circ} \text{ — } \pi \text{ rad}$$

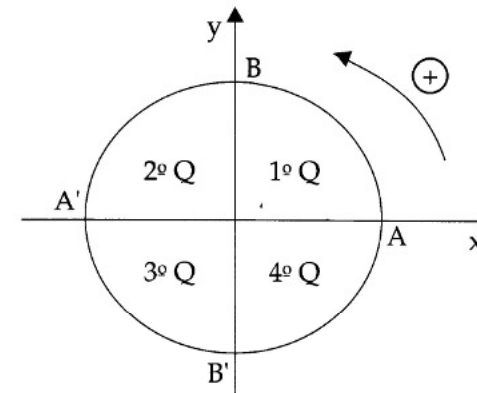
$$x^{\circ} \text{ — } \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{Daí, } x = \frac{180 \cdot \frac{5\pi}{6}}{\pi} = 150^{\circ}.$$

9.3 Ciclo trigonométrico

O conceito expresso pela palavra *ciclo* foi introduzido pelo matemático francês Laguerre. Significa uma circunferência com uma direção predefinida, isto é, orientada. Pode-se trabalhar nos sentidos horário ou anti-horário.

O *ciclo trigonométrico* é um ciclo no sentido anti-horário (sentido positivo); sua origem é o ponto A; o centro da circunferência coincide com a origem do sistema cartesiano ortogonal; o raio da circunferência é igual a 1 unidade; os eixos dividem o círculo em 4 quadrantes.



Temos, então, os pontos da circunferência $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$ e $B'(0,-1)$.

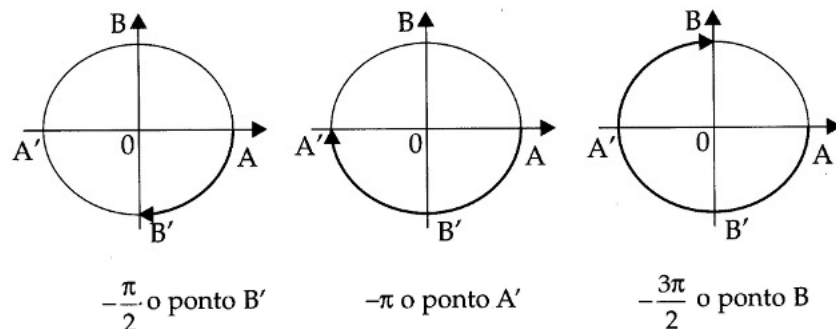
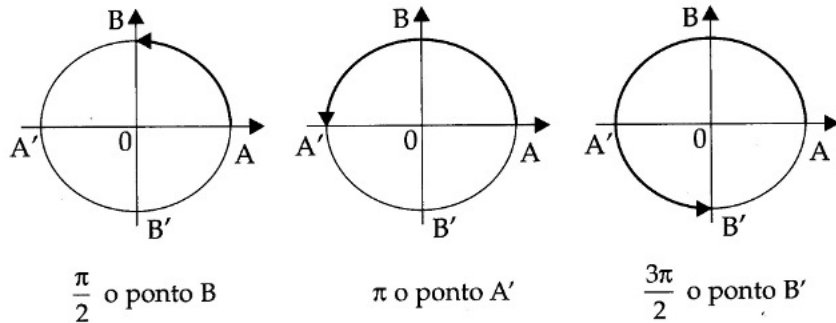
O comprimento da circunferência é 2π (pois $r = 1$).

Para cada número real x , vamos associar um ponto P na circunferência, da seguinte maneira:

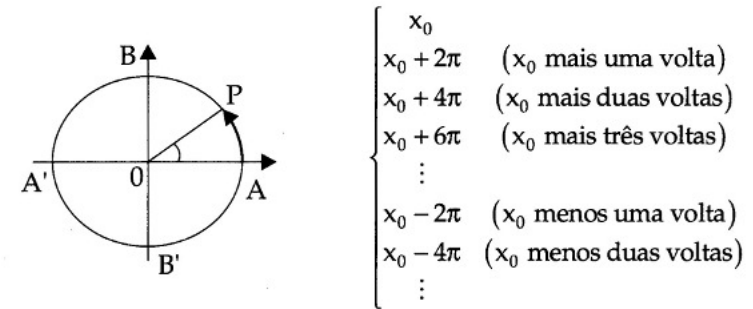
- Se $x = 0$, então $P = A$;
- Se $x > 0$, partimos de A e realizamos sobre a circunferência um percurso de comprimento x , no sentido anti-horário. O ponto final do percurso é o ponto P ;
- Se $x < 0$, fazemos o percurso no sentido horário.

Exemplos:

Associamos ao número:



Observação: Verificamos que é possível associar a cada número real x um ponto P do ciclo trigonométrico. Observemos ainda que, se o ponto P é a imagem de um número real x_0 , então, P é a imagem dos seguintes números:



Resumindo, P é a imagem dos números x pertencentes ao conjunto:

$$\{ x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

9.4 Funções periódicas

Definição: Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ é dita *periódica* se existir um número real $p > 0$, tal que $f(x+p) = f(x)$, $\forall x \in A$. O menor valor de p que satisfaz a igualdade é chamado período de f .

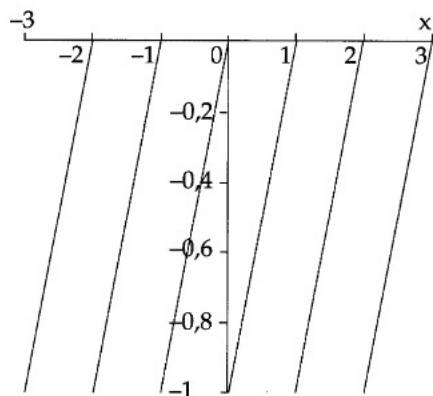
De maneira simples, podemos dizer que uma função periódica é aquela cujo gráfico, a partir de certo instante, se repete. É como se fizéssemos um carimbo com um desenho e carimbássemos uma folha seguidamente. Esse carimbo é denominado período.

Exemplo:

Seja $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x - n$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $x \leq n$.

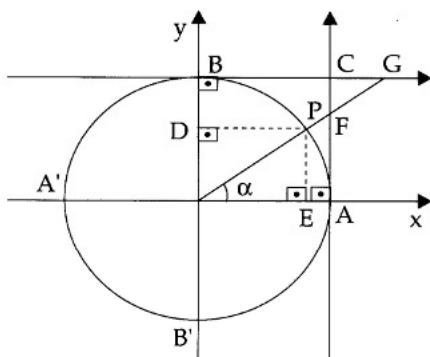
Assim, temos:

$$f(x) = \begin{cases} \dots & \dots \\ x - (-2) = x + 2 & ; \quad -3 \leq x < -2 \\ x - (-1) = x + 1 & ; \quad -2 \leq x < -1 \\ x - 0 = x & ; \quad -1 \leq x < 0 \\ x - 1 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ x - 2 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ x - 3 & ; \quad 2 \leq x < 3 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



Observe que essa função é periódica (a cada intervalo p , ela se repete) com um período $p = 1$.

9.5 Funções trigonométricas ou circulares



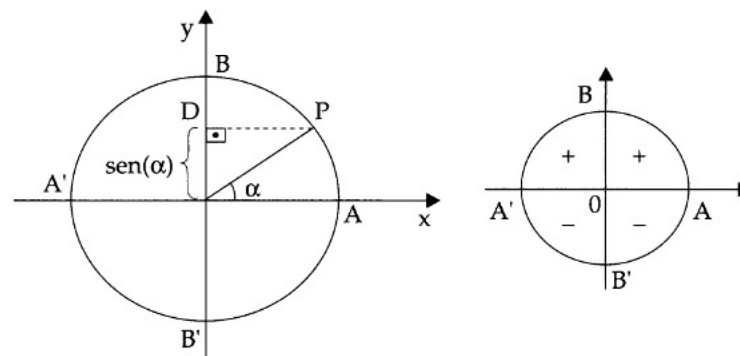
Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A . Para estudarmos as funções circulares, daremos “nomes” aos quatro eixos desse ciclo:

- a) $\vec{OB} \Rightarrow$ eixo dos senos;
- b) $\vec{OA} \Rightarrow$ eixo dos cossenos;
- c) $\vec{AC} \Rightarrow$ eixo das tangentes;
- d) $\vec{BC} \Rightarrow$ eixo das cotangentes.

Assim sendo, definimos:

$$\text{sen}(\alpha) = \vec{OD}; \quad \cos(\alpha) = \vec{OE}; \quad \text{tg}(\alpha) = \vec{AF}; \quad \text{cotg}(\alpha) = \vec{BG}.$$

9.6 Função seno



Como já foi visto, dado um ângulo α e um ponto P da circunferência, associado a α , fazemos a projeção desse ponto no eixo dos senos ($\vec{OB}$) e encontramos o ponto D . A medida $\vec{OD}$ é o seno de α ou, simplesmente, $\text{sen}(\alpha)$.

Assim, verificamos que:

α	P	Projeção no eixo dos senos	$\text{sen}(\alpha)$
0	P=A	0	$\vec{00}=0$
$\frac{\pi}{2}$	P=B	B	$\vec{0B}=1$
π	P=A'	0	$\vec{00}=0$
$\frac{3\pi}{2}$	P=B'	B'	$\vec{0B'}=-1$
2π	P=A	0	$\vec{00}=0$

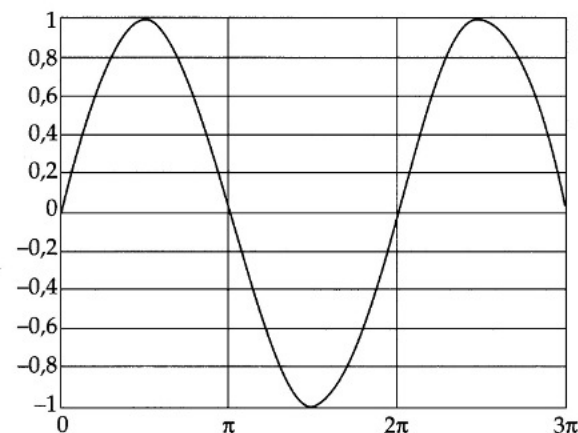
Podemos, então, escrever:

α	$\text{sen}(\alpha)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Propriedades:

- Como a projeção do ponto P está no círculo trigonométrico, e este tem raio igual a 1, a imagem da função seno é o intervalo $[-1; 1]$, isto é, $-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1$ (significa que essa função é *limitada*).
- Nos 1º e 2º quadrantes, como a projeção de P está acima do eixo x, o seno é positivo; equivalentemente, nos 3º e 4º quadrantes, a projeção está abaixo do eixo x, logo o seno é negativo.
- Nos 1º e 4º quadrantes, à medida que o ângulo cresce, o seno também cresce; logo a função é crescente aí. Equivalentemente, nos 2º e 3º quadrantes, o seno é decrescente.
- Como, a partir de 2π (uma volta inteira no ciclo), o seno se repete, a função é periódica de período 2π .
- $D(f) = \mathbb{R}$.

Vamos, então, esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, chamado *senóide*.
 $f(x) = \text{sen}(x)$



Podemos notar que a função seno é uma função *ímpar*, isto é, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Exemplo:

Vamos esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $f(x) = y = 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$,
determinando sua imagem:

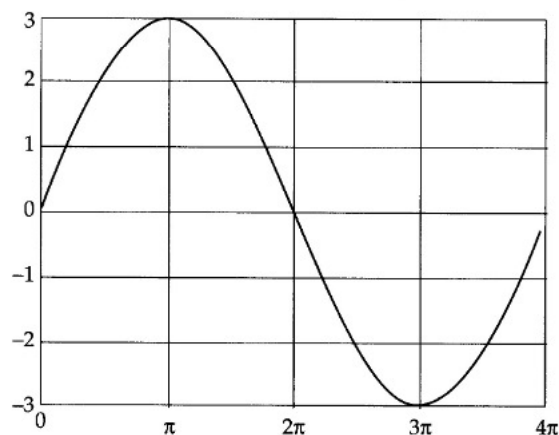
Primeiramente, sabemos que $-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1$, isto é, $-1 \leq \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1$.

Daí, $-3 \leq 3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 3$. Assim, $\text{Im}(f) = [-3; 3]$.

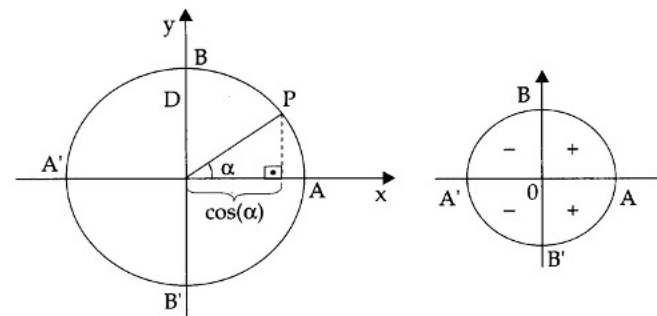
Além disso, de maneira continuada, vamos fazer a tabela dessa função:

α	$\text{sen}(\alpha)$	$\alpha = \frac{x}{2}$	x	$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$	x	$3 \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$
0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	π	1	π	3
π	0	π	2π	0	2π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi}{2}$	3π	-1	3π	-3
2π	0	2π	4π	0	4π	0

Verificamos, então, que o período dessa função é 4π ($4\pi - 0$).
Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



9.7 Função cosseno



Como já foi visto, dado um ângulo α e um ponto P da circunferência, associado a α , fazemos a projeção desse ponto no eixo dos cossenos ($\vec{OA}$) e encontramos o ponto E . A medida $\vec{OE}$ é o cosseno de α ou, simplesmente, $\cos(\alpha)$.

Assim, verificamos que:

α	P	Projeção no eixo dos cossenos	$\cos(\alpha)$
0	$P=A$	A	$\vec{OA} = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$P=B$	0	$\vec{OB} = 0$
π	$P=A'$	A'	$\vec{OA'} = -1$
$\frac{3\pi}{2}$	$P=B'$	0	$\vec{OB'} = 0$
2π	$P=A$	A	$\vec{OA} = 1$

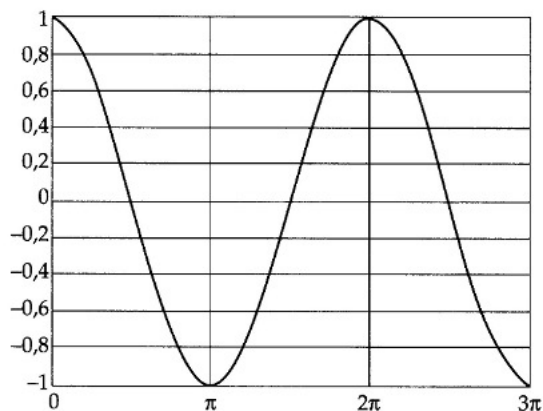
Podemos, então, escrever:

α	$\cos(\alpha)$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1

Propriedades:

-) Como a projeção do ponto P está no círculo trigonométrico, e este tem raio igual a 1, a imagem da função cosseno é o intervalo $[-1; 1]$, isto é, $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$ (significa que essa função é limitada).
-) Nos 1º e 4º quadrantes, como a projeção de P está à direita da origem, o cosseno é positivo; equivalentemente, nos 2º e 3º quadrantes, a projeção está à esquerda da origem, logo o cosseno é negativo.
-) Nos 3º e 4º quadrantes, o cosseno é crescente e nos 1º e 2º quadrantes, ele é decrescente.
-) Como, a partir de 2π (uma volta inteira no ciclo), o cosseno se repete, a função é periódica de período 2π .
-) $D(f) = \mathbb{R}$.

Vamos, então, esboçar o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, chamado *cossenoide*.



Podemos notar que a função cosseno é uma função *par*, isto é, $\cos(-x) = \cos(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

Exemplo:

Vamos esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, onde $A = \mathbb{R}$ e $B = [-1/4; 1/4]$. A função é definida por $f(x) = \frac{1}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Primeiramente, sabemos que $-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$, isto é, $-1 \leq \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$.

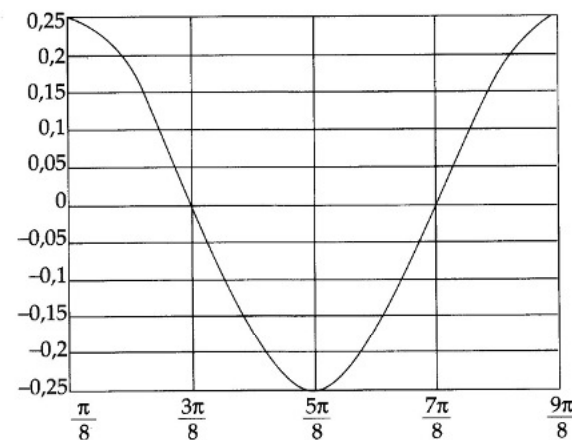
Daí, $-\frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{4}$. Assim, $\text{Im}(f) = \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Além disso, de maneira continuada, vamos fazer a tabela dessa função:

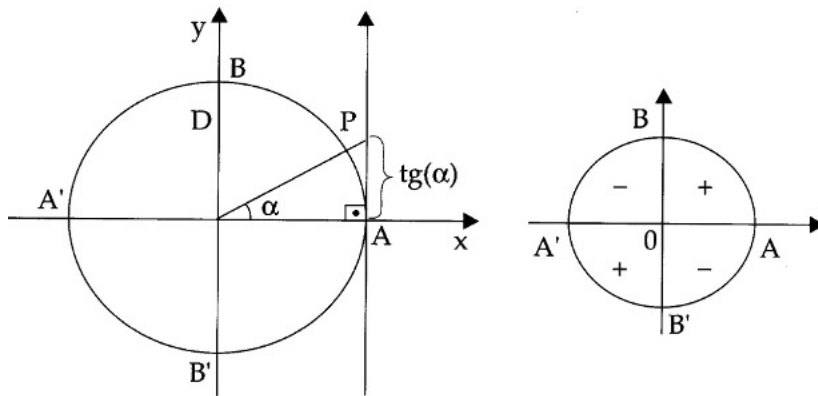
α	$\cos(\alpha)$	$\alpha = 2x - \frac{\pi}{4}$	x	$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$	x	$\frac{1}{4} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
0	1	0	$\frac{\pi}{8}$	1	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	0	$\frac{3\pi}{8}$	0
π	-1	π	$\frac{5\pi}{8}$	-1	$\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{8}$	0	$\frac{7\pi}{8}$	0
2π	1	2π	$\frac{9\pi}{8}$	1	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{1}{4}$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\pi \left(\frac{9\pi}{8} - \frac{\pi}{8} \right)$.

Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



9.8 Função tangente



Como já foi visto, dado um ângulo α e um ponto P da circunferência, associado a α , estendemos a reta OP até encontrar o eixo das tangentes ($\vec{AF}$) e encontramos o ponto F . A medida $\vec{AF}$ é a tangente de α ou, simplesmente, $\text{tg}(\alpha)$.

Assim, verificamos que:

α	P	ponto F	$\text{tg}(\alpha)$
0	$P=A$	A	$\vec{AA}=0$
$\frac{\pi}{2}$	$P=B$	$\emptyset$	$\emptyset$
π	$P=A'$	A	$\vec{AA}=0$
$\frac{3\pi}{2}$	$P=B'$	$\emptyset$	$\emptyset$
2π	$P=A$	A	$\vec{AA}=0$

Podemos, então, escrever:

α	$\text{tg}(\alpha)$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\emptyset$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\emptyset$
2π	0

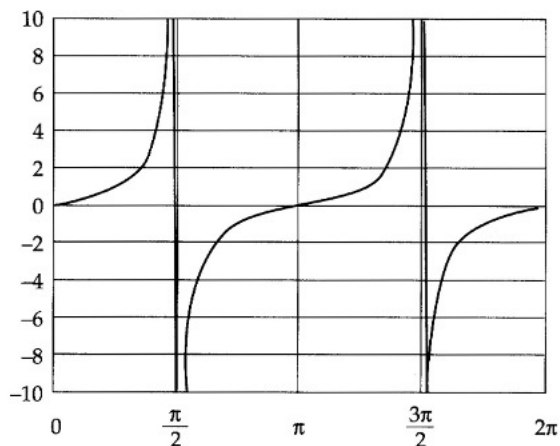
Repare que, de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a tangente vai crescendo até a reta ficar paralela ao eixo das tangentes, o mesmo acontecendo de π a $\frac{3\pi}{2}$; de π a $\frac{\pi}{2}$, assim como de 0 a $\frac{3\pi}{2}$ (no sentido horário), a tangente é sempre negativa e vai se tornando cada vez menor, até a reta ficar paralela ao eixo das tangentes também.

Propriedades:

- Como o eixo das tangentes é tangente ao ciclo trigonométrico, a $\text{tg}(\alpha)$ pode assumir qualquer valor real, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (significa que essa função é não limitada).
- Nos 1º e 3º quadrantes, como o ponto F está acima do ponto A , a tangente é positiva; equivalentemente, nos 2º e 4º quadrantes, a tangente é negativa.
- A função é monótona crescente, isto é, cresce em todo o seu domínio.
- Como, a partir de π , a tangente se repete, a função é periódica de período π .
- $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vamos, então, esboçar o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{tg}(x)$,

onde $A = D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$, chamado *tangentóide*.



Podemos notar que a função tangente é uma função *ímpar*, isto é, $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Exemplo:

Vamos esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
determinando sua imagem: $f(x) = y = 2 \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

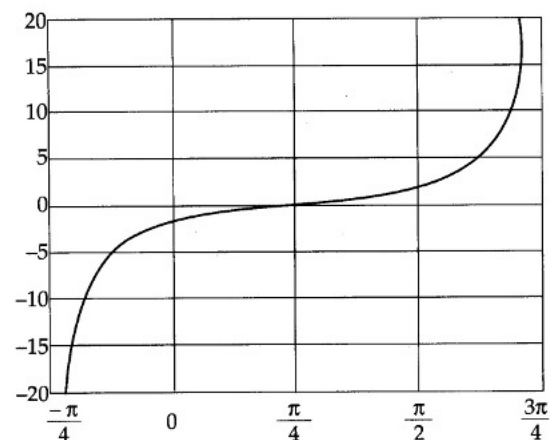
Primeiramente, sabemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Além disso, de maneira continuada, vamos fazer a tabela dessa função:

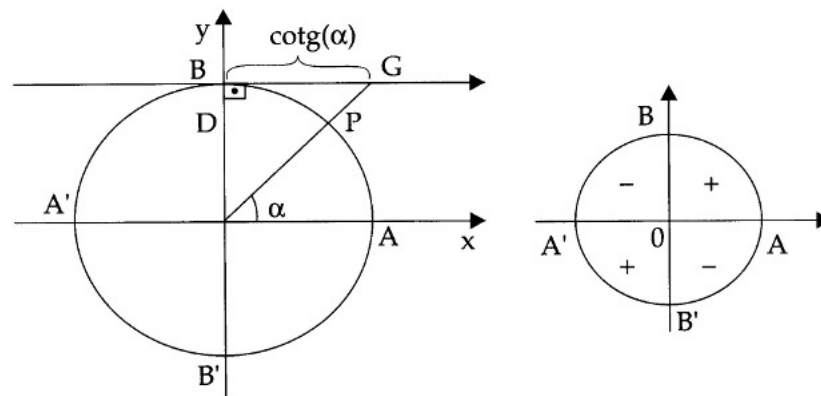
α	$\text{tg}(\alpha)$	$\alpha = x - \frac{\pi}{4}$	x	$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	x	$2 \cdot \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$	$-\frac{\pi}{4}$	$\nexists$
0	0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\nexists$	$\frac{3\pi}{4}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é π .

Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



9.9 Função cotangente



Como já foi visto, dado um ângulo α e um ponto P da circunferência, associado a α , estendemos a reta OP até encontrar o eixo das cotangentes $(\vec{BG})$ e encontramos o ponto G . A medida $\vec{BG}$ é a cotangente de α ou, simplesmente, $\cotg(\alpha)$.

Assim, verificamos que:

α	P	Ponto G	$\cotg(\alpha)$
0	P=A	$\emptyset$	$\emptyset$
$\frac{\pi}{2}$	P=B	B	$\vec{BB} = 0$
π	P=A'	$\emptyset$	$\emptyset$
$\frac{3\pi}{2}$	P=B'	B'	$\vec{B'B'} = 0$
2π	P=A	$\emptyset$	$\emptyset$

Podemos, então, escrever:

α	$\cotg(\alpha)$
0	$\emptyset$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\emptyset$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$\emptyset$

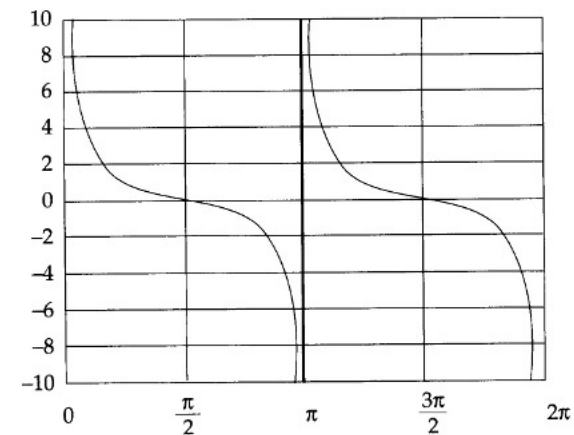
Repare que, de $\frac{\pi}{2}$ a 0, a cotangente vai crescendo até a reta ficar paralela ao eixo das cotangentes, o mesmo acontecendo de $\frac{3\pi}{2}$ a π (no sentido horário); de $\frac{\pi}{2}$ a π , assim como de $\frac{3\pi}{2}$ a 2π , a cotangente é sempre negativa e vai ficando cada vez menor, até a reta ficar paralela ao eixo das cotangentes também.

Propriedades:

- a) Como o eixo das cotangentes é tangente ao ciclo trigonométrico, a $\cotg(\alpha)$ pode assumir qualquer valor real, isto é, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ (significa que essa função é não limitada).

- b) No 1º e no 3º quadrantes, como o ponto G está à direita do ponto B, a cotangente é positiva; equivalentemente, no 2º e no 4º quadrantes, a cotangente é negativa.
- c) A função é monótona decrescente, isto é, decresce em todo o seu domínio.
- d) Como, a partir de π , a cotangente se repete, a função é periódica de período π .
- e) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Vamos, então, esboçar o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cotg(x)$, onde $A = D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$, chamado *cotangêntide*.



Podemos notar que a função cotangente é uma função *ímpar*, isto é, $\cotg(-x) = -\cotg(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Exemplo:

Esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = y = \frac{2}{5} \cdot \cotg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$, determinando sua imagem:

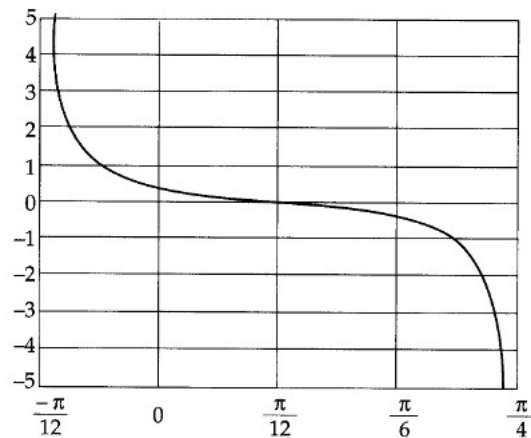
Primeiramente, sabemos que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Além disso, de maneira continuada, vamos fazer a tabela dessa função:

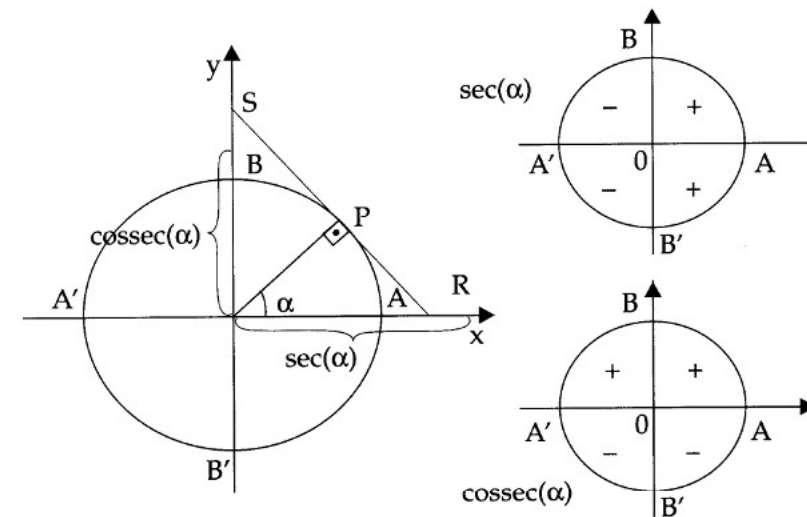
α	$\cotg(\alpha)$	$\alpha = 3x + \frac{\pi}{4}$	x	$\cotg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$	x	$\frac{2}{5}\cotg\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$
0	$\nexists$	0	$-\frac{\pi}{12}$	$\nexists$	$-\frac{\pi}{12}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	0
π	$\nexists$	π	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$	$\frac{\pi}{4}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{3}$.

Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



9.10 Função secante e função cossecante



Essas duas últimas funções, diferentemente das outras funções trigonométricas, têm um eixo móvel, isto é, para cada ponto P da circunferência, traçamos a reta tangente a ela no ponto P . Essa reta corta o eixo dos cosenos no ponto R e o eixo dos senos no ponto S . A medida $\vec{OR}$ é denominada secante de α , ou simplesmente $\sec(\alpha)$, e a medida $\vec{OS}$ é denominada cossecante de α , ou simplesmente $\cossec(\alpha)$.

Assim, verificamos que:

α	P	Ponto R	$\sec(\alpha)$	Ponto S	$\cossec(\alpha)$
0	$P=A$	A	1	$\nexists$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$P=B$	$\nexists$	$\nexists$	B	1
π	$P=A'$	A'	-1	$\nexists$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	$P=B'$	$\nexists$	$\nexists$	B'	-1
2π	$P=A$	A	1	$\nexists$	$\nexists$

Podemos, então, escrever:

a	sec(a)	cossec(α)
0	1	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	1
π	-1	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$	-1
2π	1	$\nexists$

Repare que, de 0 a $\frac{\pi}{2}$, a secante vai crescendo até a reta ficar paralela ao eixo dos cossenos, o mesmo acontecendo de 0 a $-\frac{\pi}{2}$ (no sentido horário); de π a $\frac{\pi}{2}$ (no sentido horário), assim como de π a $\frac{3\pi}{2}$, a secante é sempre negativa e vai se tornando cada vez menor, até a reta ficar paralela ao eixo dos cossenos também.

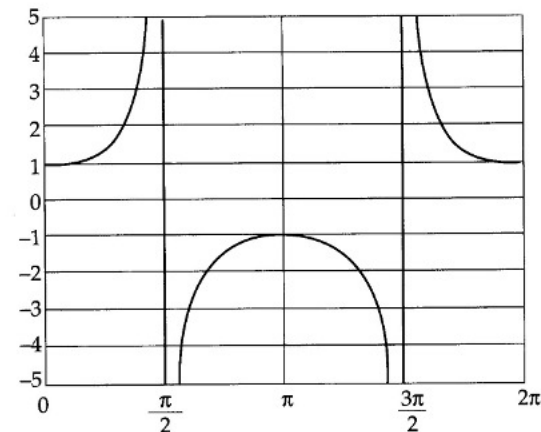
Faça essa análise para a função cossecante.

Propriedades:

- O domínio da função secante é $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ e da função cossecante, $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Ambas as funções têm como imagem $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1; 1)$.
- As duas funções são periódicas de período 2π .

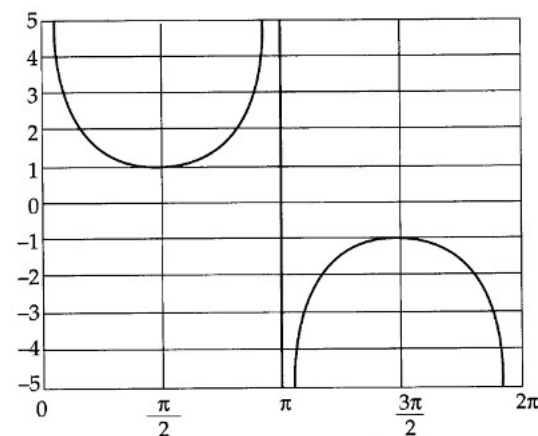
Vamos esboçar o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, onde

$$A = D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}, \text{ chamado } \textit{secantóide}.$$



Podemos notar que a função secante é uma função *par*, isto é, $\sec(-x) = \sec(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas).

Vamos esboçar o gráfico da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$, onde $f(x) = \text{cossec}(x)$, onde $A = D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$, chamado *cossecantóide*.



Podemos notar que a função cossecante é uma função *ímpar*, isto é, $\text{cossec}(-x) = -\text{cossec}(x)$ (seu gráfico é simétrico em relação à origem).

Exemplos:

- 1) Esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $f(x) = y = 3 \cdot \sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 determinando seu domínio e sua imagem.

De maneira continuada, vamos fazer a tabela desta função:

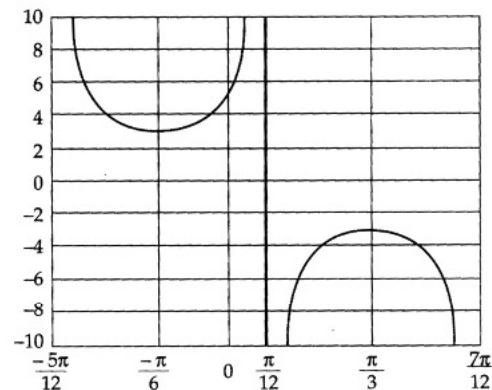
α	$\sec(\alpha)$	$\alpha = 2x + \frac{\pi}{3}$	x	$\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$	x	$3 \cdot \sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$
$-\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\nexists$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\nexists$
0	1	0	$-\frac{\pi}{6}$	1	$-\frac{\pi}{6}$	3
$\frac{\pi}{2}$	$\nexists$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{12}$	$\nexists$	$\frac{\pi}{12}$	$\nexists$
π	-1	π	$\frac{\pi}{3}$	-1	$\frac{\pi}{3}$	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\nexists$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\nexists$	$\frac{7\pi}{12}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é π .

O domínio da função é $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-3; 3)$.

Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



- 2) Esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$,
 $f(x) = y = \frac{1}{5} \cdot \text{cosec}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$,
 determinando seu domínio e sua imagem.

De maneira continuada, vamos fazer a tabela dessa função:

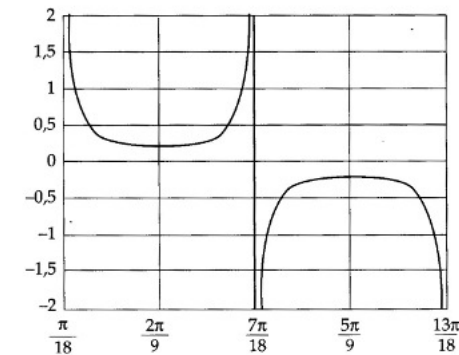
α	$\text{cosec}(\alpha)$	$\alpha = 3x - \frac{\pi}{6}$	x	$\frac{1}{5} \cdot \text{cosec}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$
0	$\nexists$	0	$\frac{\pi}{18}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{1}{5}$
π	$\nexists$	π	$\frac{7\pi}{18}$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{9}$	$-\frac{1}{5}$
2π	$\nexists$	2π	$\frac{13\pi}{18}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{2\pi}{3}$.

O domínio da função é $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

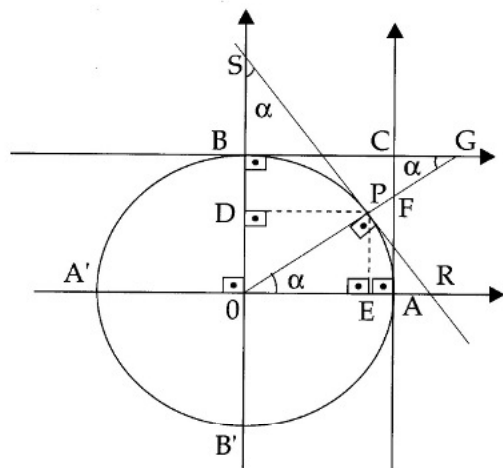
A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Utilizando a última tabela, o gráfico tem a forma:



9.11 Relações fundamentais

Seja o ciclo trigonométrico a seguir:

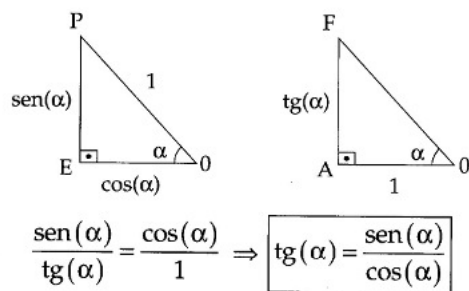


Por meio, principalmente, de semelhança de triângulos, vamos determinar as relações das funções trigonométricas.

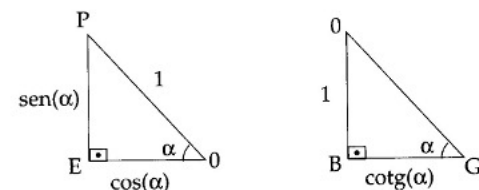
i) $\triangle OPE$ é um triângulo retângulo de raio $\overline{OP} = 1$, $\overline{OE} = \cos(\alpha)$ e $\overline{EP} = \sin(\alpha)$. Daí, e pelo teorema de Pitágoras,

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}.$$

ii) $\triangle OPE$ e $\triangle OFA$

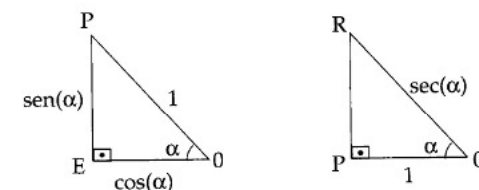


c) $\triangle OPE$ e $\triangle OBG$



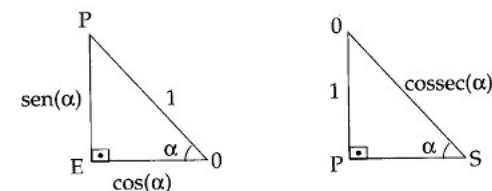
$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{\cos(\alpha)}{\text{cotg}(\alpha)} \Rightarrow \boxed{\text{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}} \Rightarrow \text{cotg}(\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(\alpha)}$$

d) $\triangle OPE$ e $\triangle OPR$



$$\frac{1}{\sec(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{1} \Rightarrow \boxed{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}}$$

e) $\triangle OPE$ e $\triangle OPS$



$$\frac{\sin(\alpha)}{1} = \frac{1}{\text{cosec}(\alpha)} \Rightarrow \boxed{\text{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}}$$

f) Como $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, temos:

$$\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \boxed{\text{tg}^2(x) + 1 = \sec^2(x)}$$

$$\frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)} \Rightarrow 1 + \cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x)$$

Existem outras fórmulas, muito utilizadas em trigonometria, que apresentamos a seguir:

g) $\sin(a+b) = \sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)$

h) $\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin(a) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(a)$

i) $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

j) $\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b)$

k) $\sin(2a) = \sin(a+a) = 2 \cdot \sin(a) \cdot \cos(b)$

l) $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

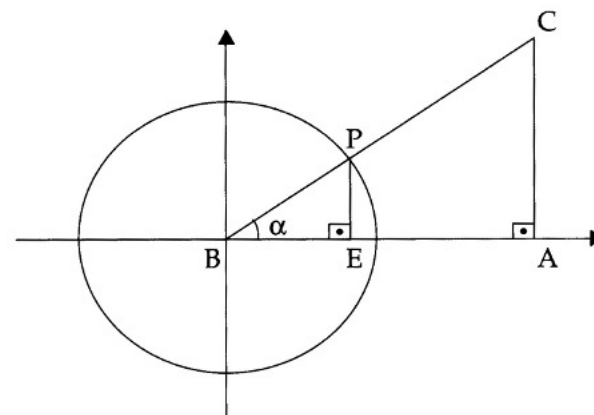
Além dessas fórmulas, existem muitas outras que poderíamos ressaltar. Basta, para isso, fazermos combinações com as fórmulas anteriores. Como exemplo, do que acabamos de citar, temos:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)}{\cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}$$

$$= \frac{\frac{\sin(a) \cdot \cos(b) + \sin(b) \cdot \cos(a)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}}{\frac{\cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}} = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)}$$

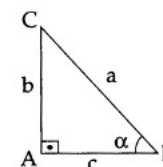
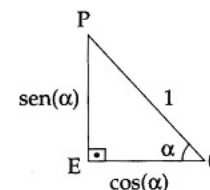
Daí, $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg}(a) + \operatorname{tg}(b)}{1 - \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b)}$

9.12 Propriedades trigonométricas em triângulos



Seja o ciclo trigonométrico anterior (circunferência com raio 1) e um triângulo retângulo ABC, semelhante ao triângulo BPE.

Assim, temos:



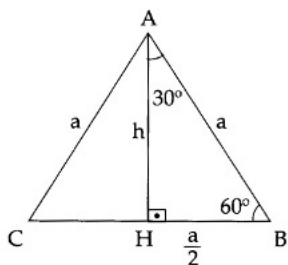
$$\frac{\sin(\alpha)}{b} = \frac{1}{a} \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{\cos(\alpha)}{c} = \frac{1}{a} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

A partir dessas relações entre ângulos e lados de um triângulo retângulo, vamos determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos: 30° , 45° e 60° .

Seja o triângulo equilátero a seguir:



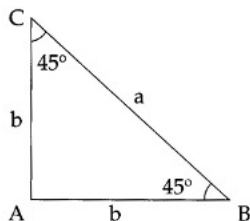
$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Do triângulo retângulo AHB e das relações trigonométricas vistas anteriormente, temos:

$$\boxed{\sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}}; \quad \boxed{\cos(30^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\boxed{\sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}}; \quad \boxed{\cos(60^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}}$$

Seja o triângulo retângulo isósceles a seguir:



$$a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Logo,

$$\boxed{\sin(45^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}}; \quad \boxed{\cos(45^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Na tabela a seguir, temos alguns valores trigonométricos para ângulos específicos:

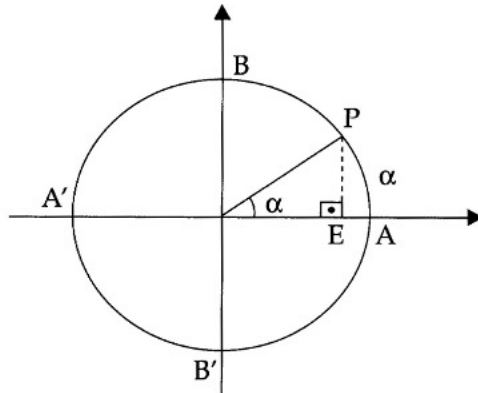
grau	radiano	seno	cosseno	tangente	cotangente	secante	cossecante
0	0	0	1	0	$\neq$	1	$\neq$
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\neq$	0	$\neq$	1
180	π	0	-1	0	$\neq$	-1	$\neq$
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\neq$	0	$\neq$	-1
360	2π	0	1	0	$\neq$	1	$\neq$

9.13 Funções trigonométricas simétricas (funções arco)

Como as funções trigonométricas são periódicas, significa que não são bijetoras. Sendo assim, suas inversas são apenas relações e, conseqüentemente, suas simétricas também.

Como queremos determinar as funções simétricas (ou funções arco), teremos de restringir o domínio das funções trigonométricas para que tenhamos funções bijetoras e, daí, funções simétricas.

Seja o ciclo trigonométrico a seguir:



Observemos que $\text{sen}(\alpha) = \overline{EP} = y$.

Podemos dizer que α é um arco (ou um ângulo) cujo seno dele (de α) mede y .

Transcrevendo:

$$\text{sen}(\alpha) = y \Leftrightarrow \alpha = \arcsen(y)$$

Podemos fazer essa mesma transcrição para todas as outras funções trigonométricas.

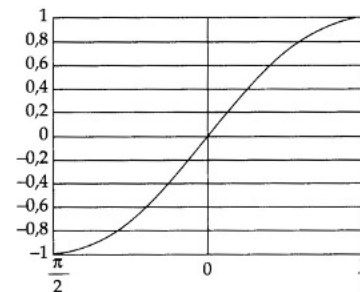
Exemplos:

- 1) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$
- 2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
- 3) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
- 4) $\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{arccotg}(0) = \frac{3\pi}{2}$
- 5) $\sec(\pi) = -1 \Leftrightarrow \text{arcsec}(-1) = \pi$
- 5) $\text{cossec}(0) = 1 \Leftrightarrow \text{arccossec}(1) = 0$

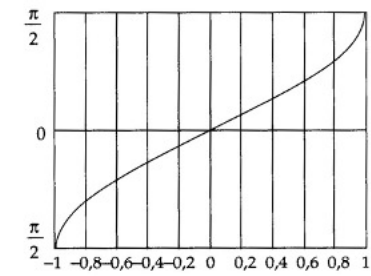
Analisando os gráficos das funções trigonométricas, podemos, restringindo seus domínios, determinar as seguintes funções arco:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Seja } f : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto f(x) = \text{sen}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A função arco será definida por } g : [-1; 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto g(x) = \arcsen(x) \end{aligned}$$



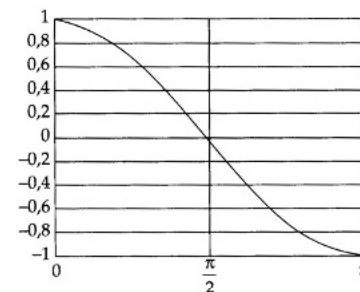
$$f(x) = \text{sen}(x)$$



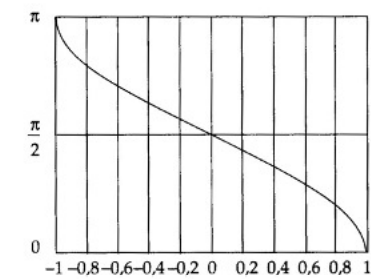
$$g(x) = \arcsen(x)$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Seja } f : [0; \pi] &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : [-1; 1] &\rightarrow [0; \pi] \\ x &\mapsto g(x) = \arccos(x) \end{aligned}$$



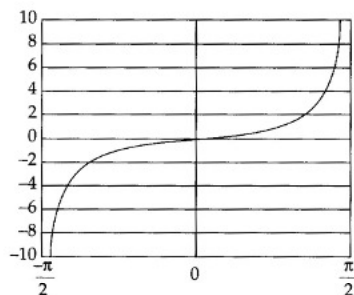
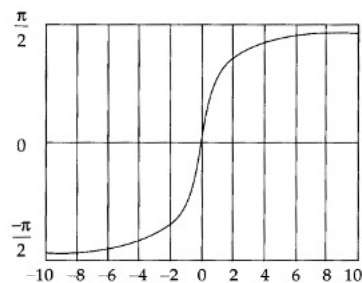
$$f(x) = \cos(x)$$



$$g(x) = \arccos(x)$$

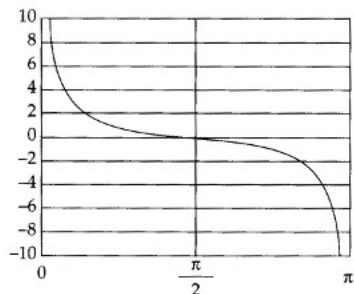
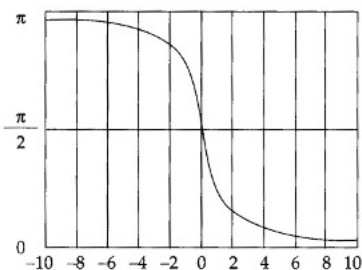
$$3) \text{ Seja } f : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \operatorname{tg}(x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ x \mapsto g(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

 $f(x) = \operatorname{tg}(x)$  $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$

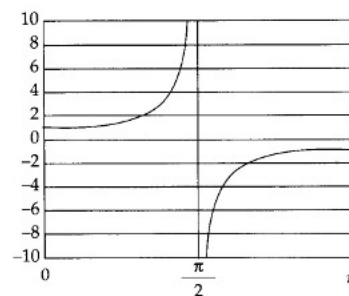
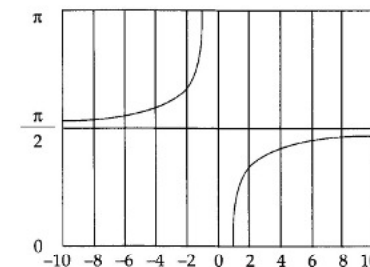
$$4) \text{ Seja } f : (0; \pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \operatorname{cotg}(x)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow (0; \pi) \\ x \mapsto g(x) = \operatorname{arccotg}(x)$$

 $f(x) = \operatorname{cotg}(x)$  $g(x) = \operatorname{arccotg}(x)$

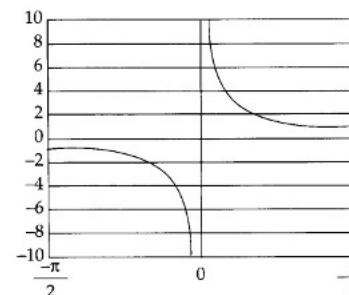
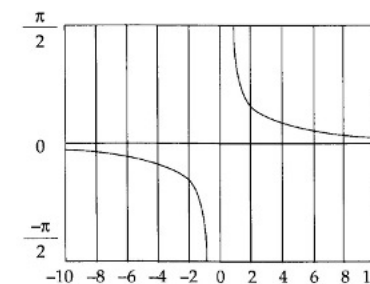
$$5) \text{ Seja } f : \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \rightarrow \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x \mapsto f(x) = \sec(x)$$

$$g : \mathbb{R} - (-1; 1) \rightarrow \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ x \mapsto g(x) = \operatorname{arcsec}(x)$$

 $f(x) = \sec(x)$  $g(x) = \operatorname{arcsec}(x)$

$$6) \text{ Seja } f : \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} - (-1; 1) \\ x \mapsto f(x) = \operatorname{cossec}(x)$$

$$g : \mathbb{R} - (-1; 1) \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right] \\ x \mapsto g(x) = \operatorname{arccossec}(x)$$

 $f(x) = \operatorname{cossec}(x)$  $g(x) = \operatorname{arccossec}(x)$

9.14 Exercícios resolvidos

Esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x \mapsto f(x)=y} B \subset \mathbb{R}$, determinando sua imagem:

- | | |
|---|--|
| a) $f(x) = y = \sin(7x - 2)$ | h) $f(x) = y = 3 + 4\operatorname{tg}(-7x - 5)$ |
| b) $f(x) = y = \sin(-2x + 3)$ | i) $f(x) = y = \operatorname{cotg}(5x - 1)$ |
| c) $f(x) = y = 3 + 2\sin(2x - 4)$ | j) $f(x) = y = 3 + 4\operatorname{cotg}(7x - 5)$ |
| d) $f(x) = y = \cos(5x + 1)$ | k) $f(x) = y = 3 + 4\sec(5x - 3)$ |
| e) $f(x) = y = \cos(-8x + 5)$ | l) $f(x) = y = \operatorname{cosec}(-x - 1)$ |
| f) $f(x) = y = 5 + 3\cos(4x - 7)$ | m) $f(x) = y = \operatorname{cosec}(x - 5)$ |
| g) $f(x) = y = \operatorname{tg}(3x + 5)$ | n) $f(x) = y = 3 - \operatorname{cosec}(3x - 5)$ |

Solução:

a) $f(x) = y = \sin(7x - 2)$

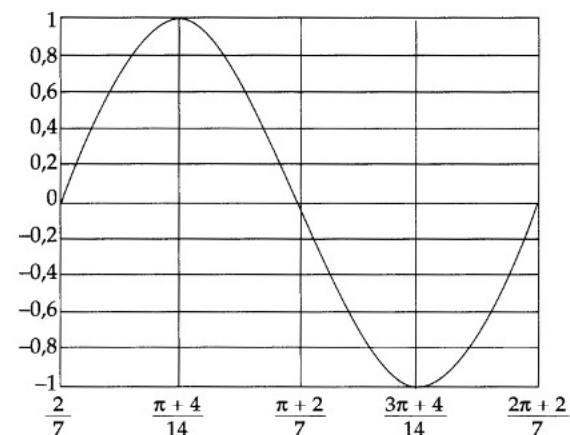
Como a função seno varia no intervalo $[-1; 1]$, temos:

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin(7x - 2) \leq 1. \text{ Daí, } \operatorname{Im}(f) = [-1; 1].$$

α	$\sin(\alpha)$	$\alpha = 7x - 2$	x	$\sin(7x - 2)$
0	0	0	$\frac{2}{7}$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi + 4}{14}$	1
π	0	π	$\frac{\pi + 2}{7}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi + 4}{14}$	-1
2π	0	2π	$\frac{2\pi + 2}{7}$	0

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{2\pi}{7} \left(\frac{2\pi + 2}{7} - \frac{2}{7} \right)$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



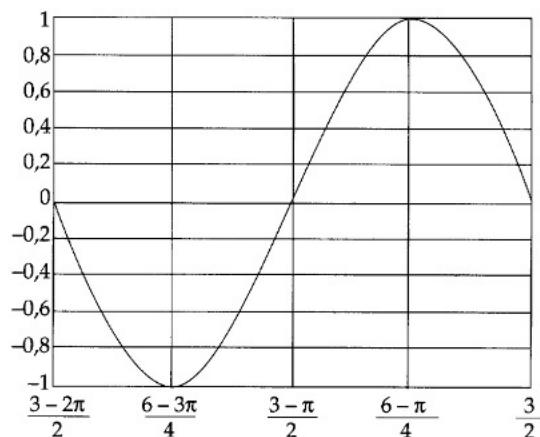
b) $f(x) = y = \sin(-2x + 3)$

$$-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin(-2x + 3) \leq 1. \text{ Daí, } \operatorname{Im}(f) = [-1; 1].$$

α	$\sin(\alpha)$	$\alpha = -2x + 3$	x	$\sin(-2x + 3)$
0	0	0	$\frac{3}{2}$	0
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{6 - \pi}{4}$	1
π	0	π	$\frac{3 - \pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{6 - 3\pi}{4}$	-1
2π	0	2π	$\frac{3 - 2\pi}{2}$	0

Verificamos, então, que o período dessa função é π .

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



c) $f(x) = y = 3 + 2\text{sen}(2x - 4)$

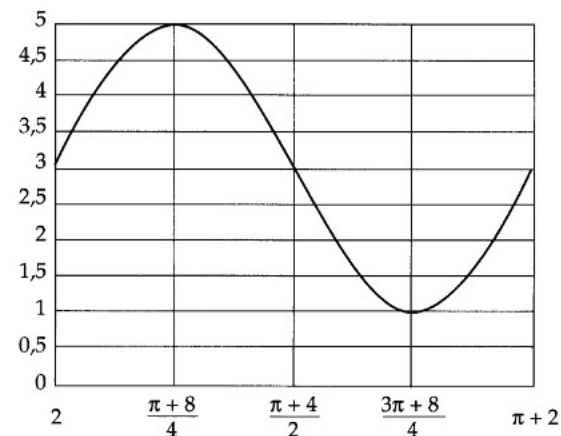
$$-1 \leq \text{sen}(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \text{sen}(2x - 4) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\text{sen}(2x - 4) \leq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3 + 2\text{sen}(2x - 4) \leq 5. \text{ Daí, } \text{Im}(f) = [1; 5].$$

$\alpha = 2x - 4$	$\text{sen}(2x - 4)$	x	$3 + 2\text{sen}(2x - 4)$
0	0	2	3
$\frac{\pi}{2}$	1	$\frac{\pi + 8}{4}$	5
π	0	$\frac{\pi + 4}{2}$	3
$\frac{3\pi}{2}$	-1	$\frac{3\pi + 8}{4}$	1
2π	0	$\pi + 2$	3

Verificamos, então, que o período dessa função é π .

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



d) $f(x) = y = \cos(5x + 1)$

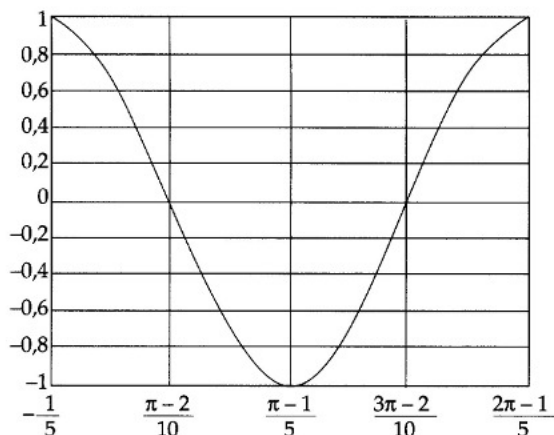
Como a função cosseno varia no intervalo $[-1; 1]$, temos:

$$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos(5x + 1) \leq 1. \text{ Daí, } \text{Im}(f) = [-1; 1].$$

α	$\cos(\alpha)$	$\alpha = 5x + 1$	x	$\cos(5x + 1)$
0	1	0	$-\frac{1}{5}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi - 2}{10}$	0
π	-1	π	$\frac{\pi - 1}{5}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi - 2}{10}$	0
2π	1	2π	$\frac{2\pi - 1}{5}$	1

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{2\pi}{5}$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



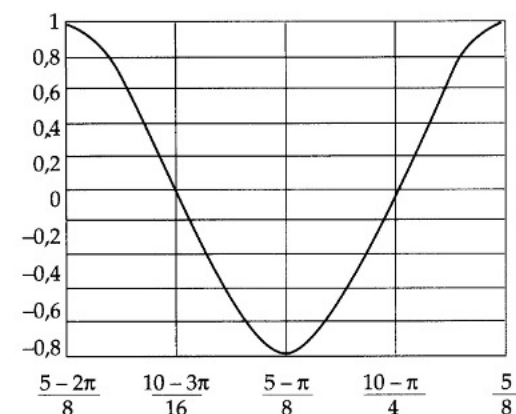
e) $f(x) = y = \cos(-8x + 5)$

$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos(-8x + 5) \leq 1$. Daí, $\text{Im}(f) = [-1; 1]$.

α	$\cos(\alpha)$	$\alpha = -8x + 5$	x	$\cos(-8x + 5)$
0	1	0	$\frac{5}{8}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{10 - \pi}{16}$	0
π	-1	π	$\frac{5 - \pi}{8}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{10 - 3\pi}{16}$	0
2π	1	2π	$\frac{5 - 2\pi}{8}$	1

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{4}$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



f) $f(x) = y = 5 + 3\cos(4x - 7)$

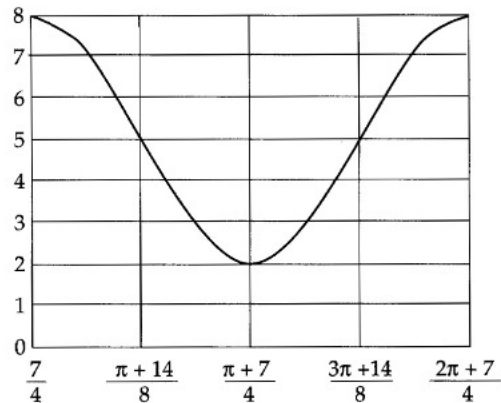
$-1 \leq \cos(\alpha) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \cos(4x - 7) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos(4x - 7) \leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \leq 5 + 3\cos(4x - 7) \leq 8$. Daí, $\text{Im}(f) = [2; 8]$.

$\alpha = 4x - 7$	$\cos(4x - 7)$	x	$5 + 3\cos(4x - 7)$
0	1	$\frac{7}{4}$	8
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi + 14}{8}$	5
π	-1	$\frac{\pi + 7}{4}$	2
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{3\pi + 14}{8}$	5
2π	1	$\frac{2\pi + 7}{4}$	8

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{2}$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



g) $f(x) = y = \text{tg}(3x+5)$

A tabela a seguir apresenta, em sua primeira coluna, valores possíveis para o ângulo α , dado por $\alpha = 3x + 5$.

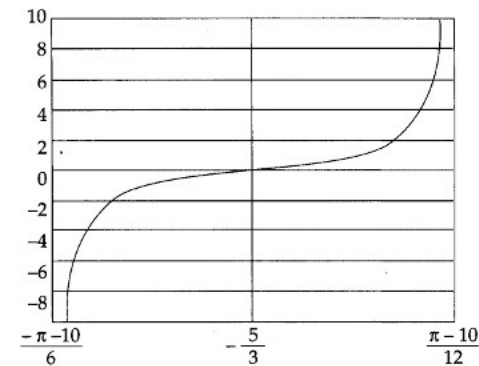
Dessa equação, temos o valor de x apresentado na segunda coluna da tabela, $3x = \alpha - 5 \Rightarrow x = \frac{\alpha - 5}{3}$. Na terceira coluna da tabela, é calculado o valor da função tangente.

$\alpha = 3x + 5$	$x = \frac{\alpha - 5}{3}$	$\text{tg}(3x + 5)$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi - 10}{6}$	$\nexists$
0	$-\frac{5}{3}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi - 10}{6}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{3}$.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi - 10}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



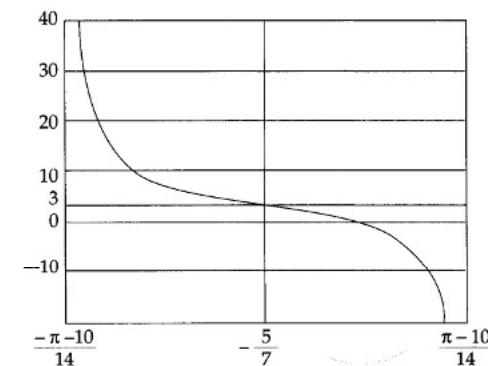
h) $f(x) = y = 3 + 4\text{tg}(-7x - 5)$

$\alpha = -7x - 5$	x	$\text{tg}(-7x - 5)$	$3 + 4 \cdot \text{tg}(-7x - 5)$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi - 10}{14}$	$\nexists$	$\nexists$
0	$-\frac{5}{7}$	0	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi - 10}{14}$	$\nexists$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{7}$.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi - 10}{14} + \frac{k\pi}{7}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



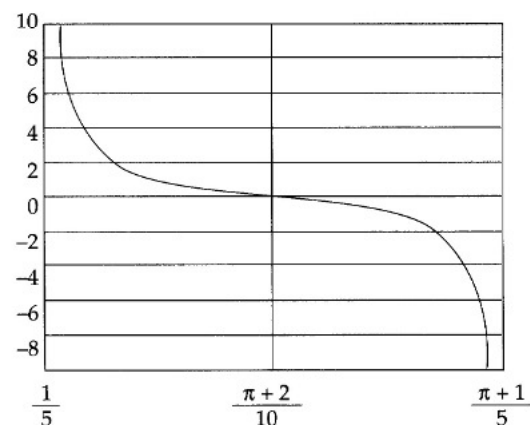
i) $f(x) = y = \cotg(5x - 1)$

$\alpha = 5x - 1$	x	$\cotg(5x - 1)$
0	$\frac{1}{5}$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi + 2}{10}$	0
π	$\frac{\pi + 1}{5}$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{5}$.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{5} + \frac{k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



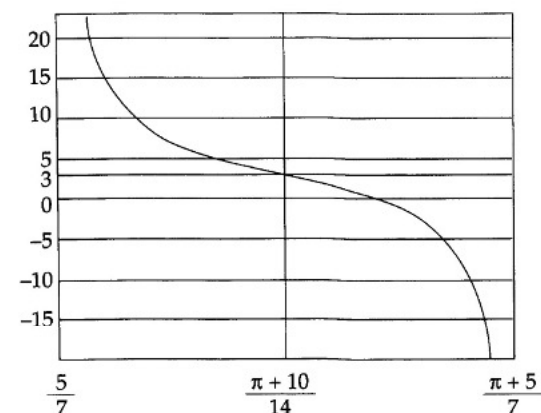
j) $f(x) = y = 3 + 4\cotg(7x - 5)$

$\alpha = 7x - 5$	x	$\cotg(7x - 5)$	$3 + 4\cotg(7x - 5)$
0	$\frac{5}{7}$	$\nexists$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi + 10}{14}$	0	3
π	$\frac{\pi + 5}{7}$	$\nexists$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{\pi}{7}$.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{7} + \frac{k\pi}{7}; k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ e } \text{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



k) $f(x) = y = 3 + 4\sec(5x - 3)$

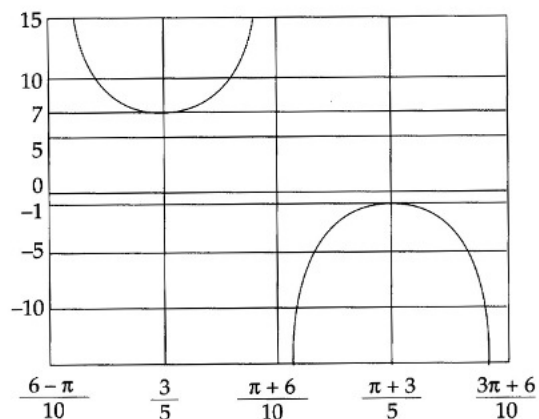
$\alpha = 5x - 3$	x	$\sec(5x - 3)$	$3 + 4\sec(5x - 3)$
$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{6 - \pi}{10}$	$\nexists$	$\nexists$
0	$\frac{3}{5}$	1	7
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi + 6}{10}$	$\nexists$	$\nexists$
π	$\frac{\pi + 3}{5}$	-1	-1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi + 6}{10}$	$\nexists$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{2\pi}{5}$.

$$\text{O domínio da função é } D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi + 6}{10} + \frac{k\pi}{5}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1; 7)$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



) $f(x) = y = \text{cossec}(-x-1)$

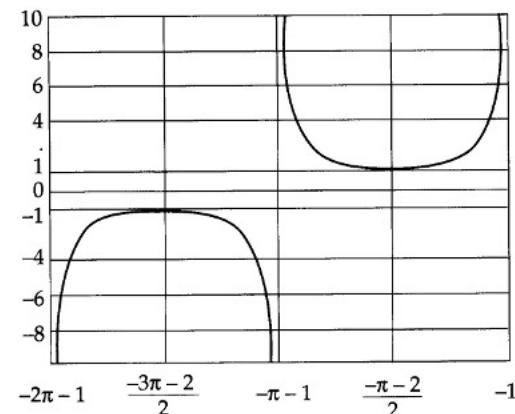
$\alpha = -x-1$	x	$\text{cossec}(-x-1)$
0	-1	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{-\pi-2}{2}$	1
π	$-\pi-1$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{-3\pi-2}{2}$	-1
2π	$-2\pi-1$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é 2π .

O domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\pi-1+k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1; 1)$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



m) $f(x) = y = \text{cossec}(x-5)$

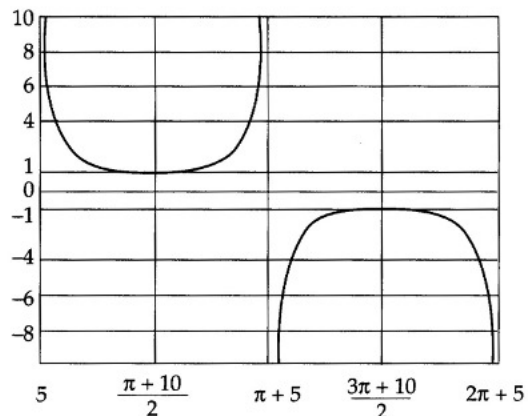
$\alpha = x-5$	x	$\text{cossec}(x-5)$
0	5	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi+10}{2}$	1
π	$\pi+5$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi+10}{2}$	-1
2π	$2\pi+5$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é 2π .

O domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5+k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

A imagem da função é $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1; 1)$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



i) $f(x) = y = 3 - \operatorname{cosec}(3x - 5)$

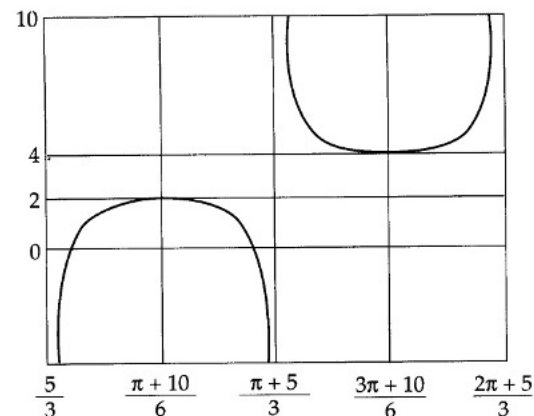
$\alpha = 3x - 5$	x	$\operatorname{cosec}(3x - 5)$	$3 - \operatorname{cosec}(3x - 5)$
0	$\frac{5}{3}$	$\nexists$	$\nexists$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi+10}{6}$	1	2
π	$\frac{\pi+5}{3}$	$\nexists$	$\nexists$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi+10}{6}$	-1	4
2π	$\frac{2\pi+5}{3}$	$\nexists$	$\nexists$

Verificamos, então, que o período dessa função é $\frac{2\pi}{3}$.

O domínio da função é $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi+5}{3} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A imagem da função é $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R} - (2; 4)$.

Utilizando a tabela, temos o gráfico a seguir:



9.15 Exercícios propostos

1) Expressar em radianos:

- a) 45° b) 135° c) 300°

2) Expressar em graus:

- a) $\frac{7\pi}{4}$ rad b) $\frac{5\pi}{3}$ rad c) $\frac{11\pi}{6}$ rad

3) Indicar o ponto do ciclo correspondente a cada número x a seguir:

- a) $x = \frac{\pi}{3}$ e) $x = \frac{28\pi}{3}$
 b) $x = -\frac{\pi}{3}$ f) $x = \frac{11\pi}{6}$
 c) $x = 21\pi$ g) $x = -\frac{25\pi}{3}$
 d) $x = \frac{13\pi}{4}$

4) Esboçar um período da função $f : A \subset \mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R} \xrightarrow{f(x)=y} B \subset \mathbb{R}$, determinando seu domínio e sua imagem:

- a) $f(x) = \operatorname{sen}(3x - 7)$ c) $f(x) = -4 + 3\operatorname{sen}(-x - 7)$
 b) $f(x) = \operatorname{sen}(-2x + 7)$ d) $f(x) = \cos(-7x + 5)$

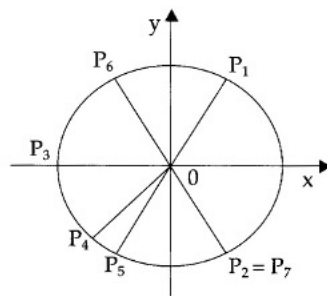
- e) $f(x) = 3\cos(-2x+5)$ j) $f(x) = 3+9\cotg(3x-5)$
 f) $f(x) = -6+5\cos(3x-4)$ k) $f(x) = -6+\sec(3x-8)$
 g) $f(x) = \tg(7x-3)$ l) $f(x) = -3+\operatorname{cosec}(-x-1)$
 h) $f(x) = 8+5\operatorname{tg}(-3x-1)$ m) $f(x) = \operatorname{cosec}(x-5)$
 i) $f(x) = -3+4\cotg(-2x-7)$ n) $f(x) = -2-5\sec(x-5)$

9.16 Respostas dos exercícios propostos

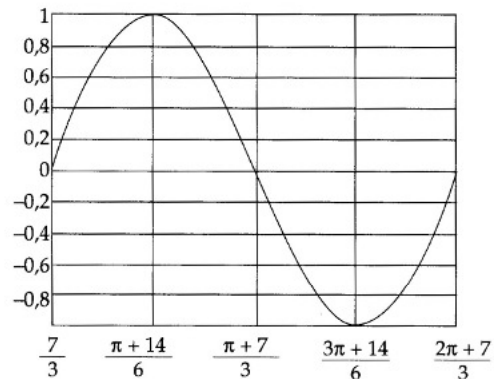
- 1) a) $\frac{\pi}{4}$ rad b) $\frac{3\pi}{4}$ rad c) $\frac{5\pi}{3}$ rad

- 2) a) 315° b) 300° c) 330°

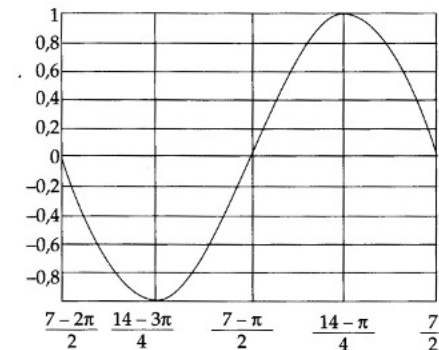
3)



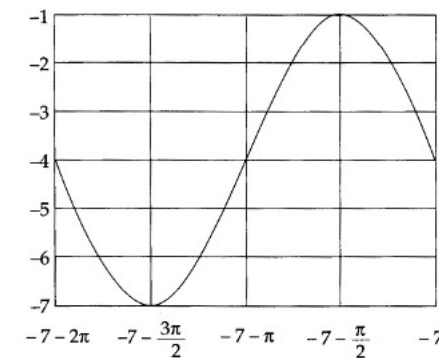
- 4) a) Período = $\frac{2\pi}{3}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im}(f) = [-1; 1]$.



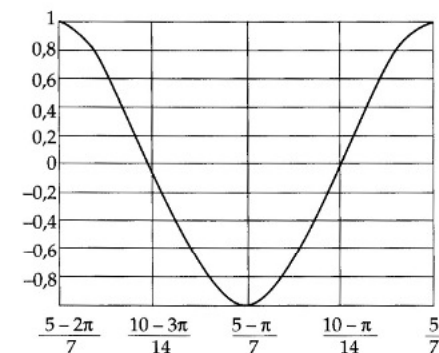
- b) Período = π ; $D(f) = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im}(f) = [-1; 1]$.



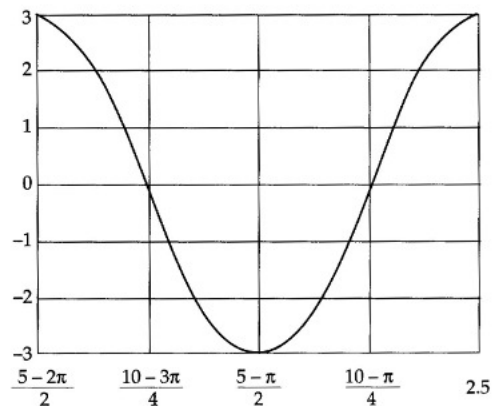
- c) Período = 2π ; $D(f) = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im}(f) = [-7; -1]$.



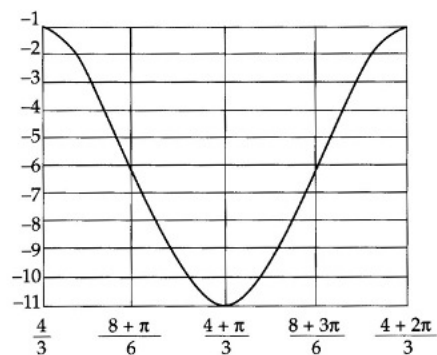
- d) Período = $\frac{2\pi}{7}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im}(f) = [-1; 1]$.



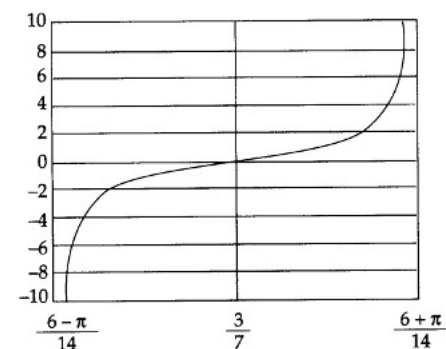
e) Período = π ; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-3; 3]$.



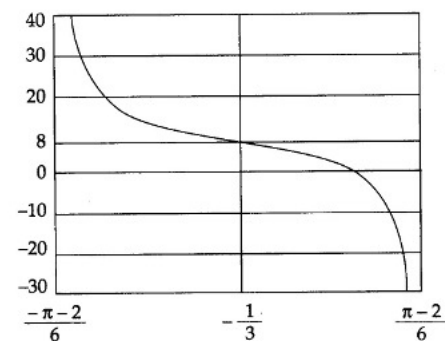
f) Período = $\frac{2\pi}{3}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [-11; -1]$.



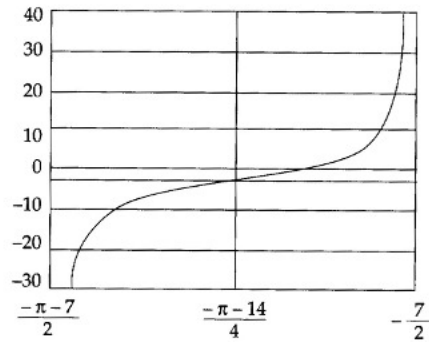
g) Período = $\frac{\pi}{7}$; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{6-\pi}{14} + \frac{k\pi}{7}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



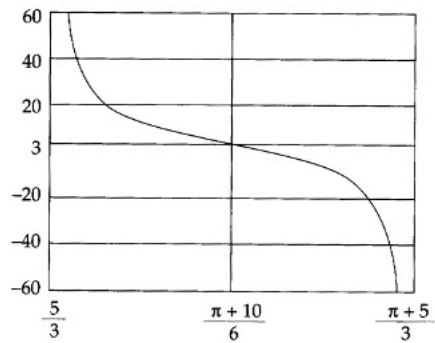
h) Período = $\frac{\pi}{3}$; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi-2}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



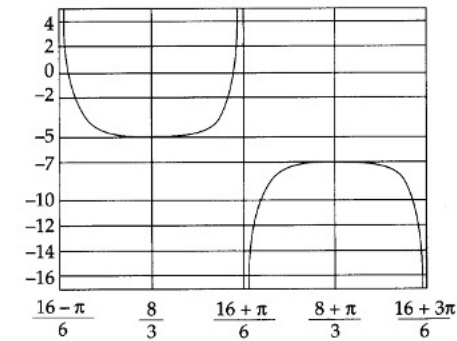
i) Período = $\frac{\pi}{2}$; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{-7}{2} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



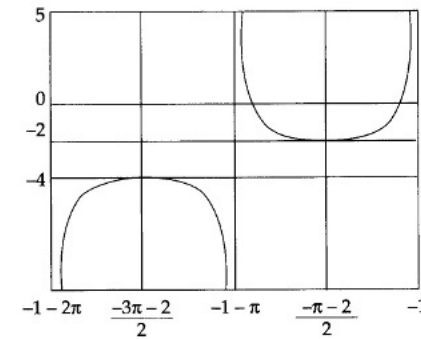
j) Período = $\frac{\pi}{3}$; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{3} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.



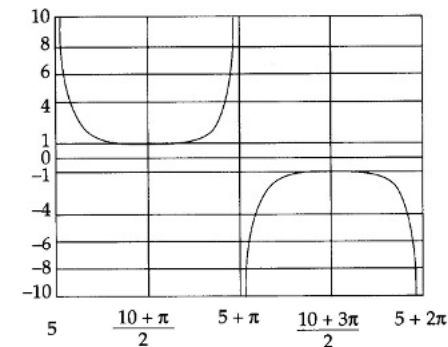
k) Período = $\frac{2\pi}{3}$; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi+16}{6} + \frac{k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-7; -5)$.



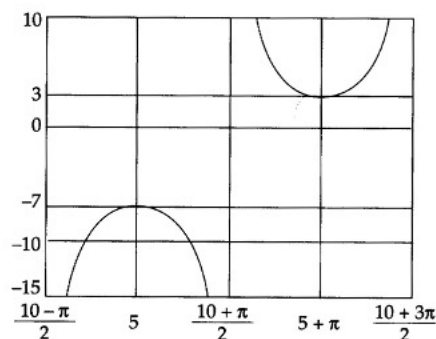
l) Período = 2π ; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-4; -2)$.



m) Período = 2π ; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5 + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-1; 1)$.



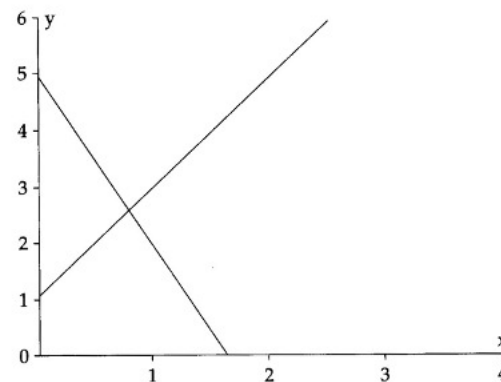
n) Período = 2π ; $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi+10}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - (-7; 3)$.



Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações de modelos matemáticos elementares e, entre eles, alguns modelos econômicos cujos conceitos serão mostrados na introdução.

10.1 Conceitos econômicos

A figura a seguir mostra uma representação geral das curvas de oferta e demanda.



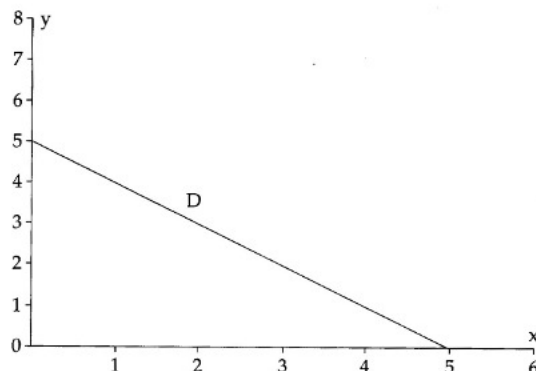
As curvas estão representadas no primeiro quadrante, pois a oferta, a demanda e o preço são positivos.

A oferta negativa significa que os produtos ainda estão em produção (ou estocados).

A demanda negativa significa que os preços são altos demais e não há consumidor.

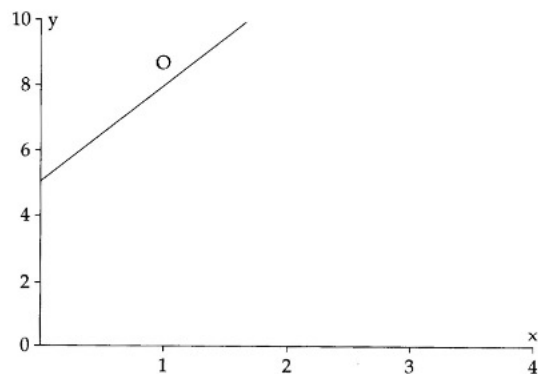
A função demanda pode ser vista como função do preço, isto é, $y_1 = f_1(x)$, onde y_1 representa o preço e x a quantidade. Um aumento nos

preços causa um decréscimo na quantidade consumida (ou demandada). Quando os preços baixam, causam um acréscimo na quantidade consumida. Logo, a função demanda é estritamente decrescente, conforme apresentada na figura a seguir.



Essa reta (D) representa o gráfico da função demanda.

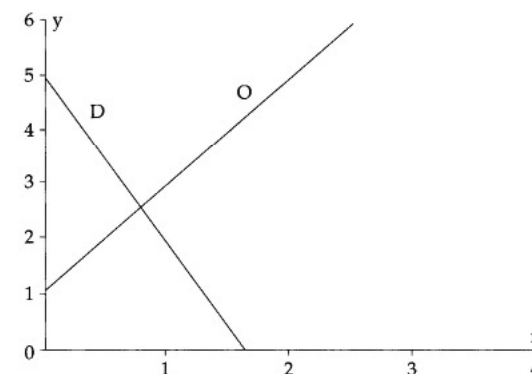
A função oferta pode ser vista como função do preço, ou seja, $y_2 = f_2(x)$, onde y_2 representa o preço e x a quantidade. Um aumento nos preços causa um acréscimo na quantidade disponível para aquisição (ou oferta). Quando os preços aumentam causam um acréscimo nas quantidades disponíveis. Logo, a função oferta é estritamente crescente, conforme mostrada na figura a seguir.



Essa reta (O) representa o gráfico da função oferta.

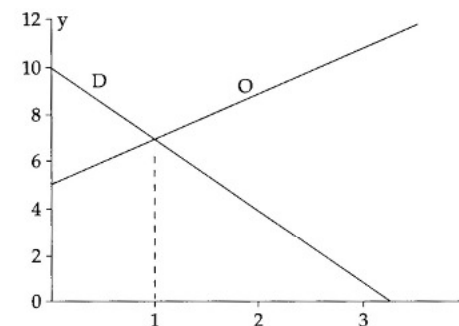
O objetivo aqui é ilustrar as aplicações de modelos matemáticos elementares. Usa-se como variável independente a quantidade (x) e como variável dependente o preço (y), pressupondo constantes todas as outras variáveis que influenciam o mercado.

Supondo que a economia funcione em um regime de concorrência perfeita, quando os preços são determinados pela lei de oferta e de procura, pode-se encontrar um preço que atenda aos consumidores e aos empresários, isto é, o preço de equilíbrio. Como o preço de equilíbrio é o ponto comum às curvas de oferta e de demanda, podemos escrever, então, $y_1(x) = y_2(x)$, que é a interseção das curvas de oferta e de demanda, conforme apresentada na figura a seguir.



A reta (D) representa demanda e a reta (O), oferta.

O objetivo de traçar as curvas de oferta e de demanda no mesmo gráfico é a visualização do comportamento conjunto das curvas, para compará-las. Observando o gráfico a seguir, podemos afirmar:



-) No intervalo $[0; x_e)$, a demanda é maior que a oferta, ou seja, temos excesso de demanda.
-) No ponto $x = x_e$, a demanda é igual a oferta, ou seja, temos o equilíbrio de mercado.
-) No intervalo $(x_e; x)$, a oferta é maior que a demanda, ou seja, temos excesso de oferta.

De modo análogo, podemos inferir as funções receita total e custo total.

A função receita total é uma função do preço unitário de venda e da quantidade vendida, dada por $R_t = f_1(x_1; p_1) = p_1 \cdot x_1$, onde:

R_t é a receita total; x_1 corresponde à quantidade vendida; p_1 refere-se ao preço unitário de venda.

A função do custo total é função dos custos fixos (ou custos indiretos, como seguro, aluguel, energia elétrica etc.), custos variáveis (os custos envolvidos diretamente na produção) e quantidades produzidas. Logo, o custo total é dado por $C_t = C_v + C_f$, onde:

C_t é o custo total; C_v compreende o custo variável; C_f refere-se ao custo fixo.

Como o custo variável é função direta da quantidade produzida, temos $C_v = f_2(x_2; p_2) = p_2 \cdot x_2$, onde:

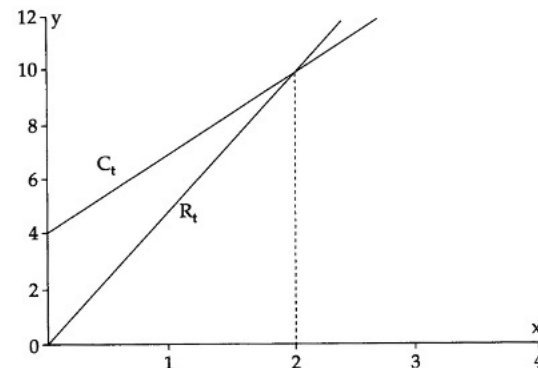
C_v é o custo variável; x_2 é a quantidade produzida; p_2 é o custo unitário de produção.

Antes do início da produção, ou seja, quando a quantidade produzida é nula ($x_2 = 0$), tem-se $C_v = 0$ ou $C_t = C_f$ (o custo total é igual ao custo fixo).

A função lucro total é a diferença entre a função receita total e a função custo total, ou seja, $L_t = R_t - C_t$, onde:

L_t corresponde à função lucro total; R_t é a função receita total; e C_t , a função custo total.

Supondo que a quantidade produzida seja igual à quantidade vendida (ausência de estoque), as curvas de receita total e de custo total podem ser representadas e analisadas no mesmo gráfico, conforme a figura a seguir.



As curvas de receita total e de custo total só serão analisadas no 1º quadrante, pois a receita, o custo e a quantidade são positivos ou nulos.

A interseção das curvas R_t e C_t é o ponto onde a receita total é igual ao custo total (ponto no qual o lucro é nulo). Supondo as curvas representadas no gráfico anterior, no intervalo $[0; x_t)$, o custo é maior que a receita (existe prejuízo) e no intervalo $x > x_t$, a receita total é maior que o custo total (existe lucro).

Exemplo:

Consideremos a curva de oferta dada pela função $y = 2x + 5$ e a curva de demanda dada pela função $y = -3x + 10$, onde x representa quantidade e y o preço.

A curva de oferta é crescente, pois é uma função linear com coeficiente angular positivo. A curva de demanda é decrescente, porque é uma função linear com coeficiente angular negativo.

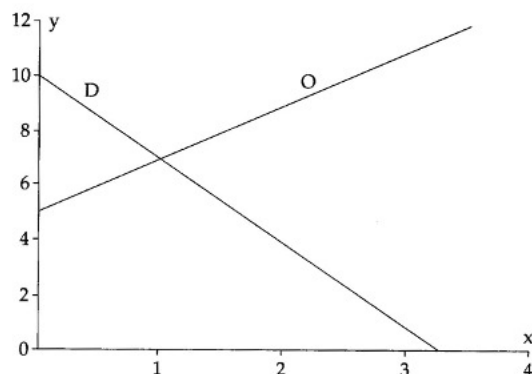
O ponto de equilíbrio é obtido igualando-se as curvas de oferta e de demanda.

Logo, $y = 2x + 5 = -3x + 10 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$ (em unidade de quantidade).

Para se obter o preço de equilíbrio, basta substituir x em uma das equações (de oferta ou de demanda). Substituindo x na equação de oferta, tem-se:

$$y = 2 \cdot 1 + 5 = 7 \text{ (em unidade de preço)}$$

O ponto de equilíbrio é (1;7) e o gráfico a seguir ilustra as curvas de oferta e de demanda no mesmo sistema de eixos, bem como o ponto de equilíbrio para as funções dadas:



0.2 Exercícios resolvidos

-) Os produtos comercializados por uma fazenda são: arroz, feijão e soja. A tabela a seguir apresenta o modelo matemático adequado para cada produto, onde x_i ($i = 1, \dots, 3$) é quantidade em toneladas.

Produto	Função custo total (em 1.000 unidades monetárias)	Função receita total (em 1.000 unidades monetárias)
Arroz (x_1)	$C_t^a = 3x_1 + 3$	$R_t^a = 7x_1 + 2$
Feijão (x_2)	$C_t^f = 2x_2 + 4$	$R_t^f = 5x_2 + 3$
Soja (x_3)	$C_t^s = 4x_3 + 15$	$R_t^s = 8x_3 + 10$

Admitindo que toda a produção é vendida, pede-se:

-) A função custo total da fazenda;
) A função receita total da fazenda;
) A função lucro total da fazenda;
) O lucro total da fazenda na venda de 5 toneladas de arroz, 2 toneladas de feijão e 3 toneladas de soja;

- e) O custo fixo na produção dos produtos;
 f) A função lucro de cada produto;
 g) O custo fixo alocado a cada produto;
 h) O ponto de equilíbrio para cada um dos produtos;
 i) Esboço do gráfico das funções L_t , R_t e C_t no mesmo sistema de eixos;
 j) A interpretação econômica.

Solução:

- a) O custo total de produção da fazenda é a soma do custo total de produção de arroz, feijão e soja, ou seja, $C_t^{\text{fazenda}} = C_t^a + C_t^f + C_t^s$.

Substituindo as expressões matemáticas, temos:

$$\begin{aligned} C_t^{\text{fazenda}} &= C_t^a + C_t^f + C_t^s = \\ &= (3x_1 + 3) + (2x_2 + 4) + (4x_3 + 15) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3) + 22. \end{aligned}$$

- b) A receita total de produção da fazenda é a soma da receita total de produção de arroz, feijão e soja, ou seja, $R_t^{\text{fazenda}} = R_t^a + R_t^f + R_t^s$.

Substituindo as expressões matemáticas, temos:

$$\begin{aligned} R_t^{\text{fazenda}} &= R_t^a + R_t^f + R_t^s = \\ &= (7x_1 + 2) + (5x_2 + 3) + (8x_3 + 10) = (7x_1 + 5x_2 + 8x_3) + 15. \end{aligned}$$

- c) O lucro total de produção da fazenda é a soma do lucro total de produção de arroz, feijão e soja (que é a diferença entre a receita total e o custo total), ou seja:

$$\begin{aligned} L_t^{\text{fazenda}} &= R_t^{\text{fazenda}} - C_t^{\text{fazenda}} = \\ &= (7x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 15) - (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 22) = 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7. \end{aligned}$$

- d) $L_t = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 7 = 20 + 6 + 12 - 7 = 31$ (em 1.000 unidades monetárias).

- e) O custo fixo é o custo existente independente de produção. Logo, fazendo $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, na expressão do custo total, tem-se:

$$C_{\text{fixo}} = (3 \cdot 0 + 3) + (2 \cdot 0 + 4) + (4 \cdot 0 + 15) = 22 \text{ (em 1.000 unidades monetárias).}$$

- f) Função lucro do arroz: $L_t^a = R_t^a - C_t^a = (7x_1 + 2) - (3x_1 + 3) = 4x_1 - 1$;

$$\text{Função lucro do feijão: } L_t^f = R_t^f - C_t^f = (5x_2 + 3) - (2x_2 + 4) = 3x_2 - 1;$$

$$\text{Função lucro da soja: } L_t^s = R_t^s - C_t^s = (8x_3 + 10) - (4x_3 + 15) = 4x_3 - 5.$$

) Custo fixo alocado ao arroz: $x_1 = 0$ em $C_t^a = 3 \cdot 0 + 3 = 3$ (em 1.000 unidades monetárias);

Custo fixo alocado ao feijão: $x_2 = 0$ em $C_t^f = 2 \cdot 0 + 4 = 4$;

Custo fixo alocado à soja: $x_3 = 0$ em $C_t^s = 4 \cdot 0 + 15 = 15$.

) O ponto de equilíbrio é aquele onde a receita total é igual ao custo total. Logo, o ponto de equilíbrio para o arroz é:

$$R_t^a = C_t^a \Rightarrow 7x_1 + 2 = 3x_1 + 3 \Rightarrow 7x_1 - 3x_1 = 3 - 2 \Rightarrow 4x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}.$$

Determinaremos o valor de y_1 :

$$7x_1 + 2 = 7 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{15}{4} = y_1.$$

Daí, o ponto de equilíbrio é $\left(\frac{1}{4}; \frac{15}{4}\right)$.

O ponto de equilíbrio para o feijão é:

$$R_t^f = C_t^f \Rightarrow 5x_2 + 3 = 2x_2 + 4 \Rightarrow 5x_2 - 2x_2 = 4 - 3 \Rightarrow 3x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}.$$

Determinaremos o valor de y_2 :

$$5x_2 + 3 = 5 \cdot \frac{1}{3} + 3 = \frac{14}{3} = y_2.$$

Daí, o ponto de equilíbrio é $\left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

O ponto de equilíbrio para a soja é:

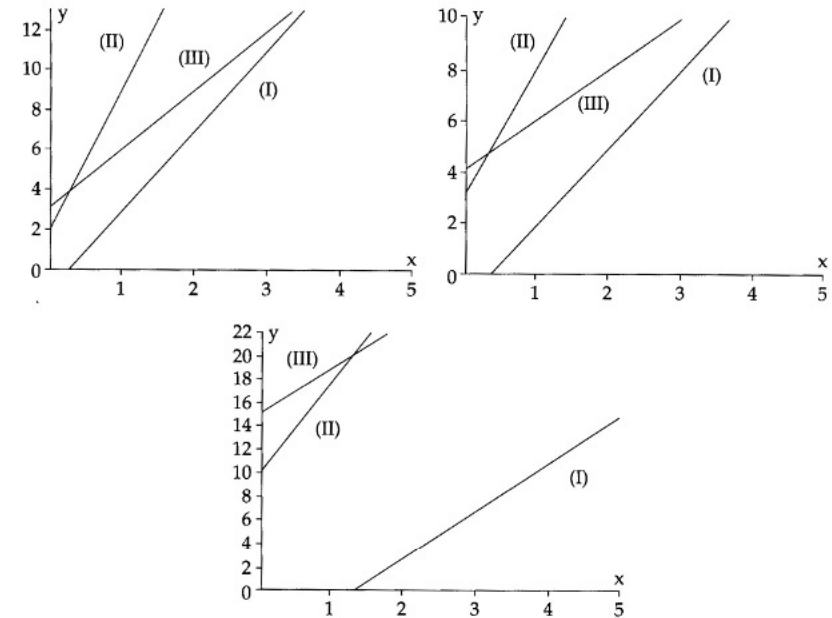
$$R_t^s = C_t^s \Rightarrow 8x_3 + 10 = 4x_3 + 15 \Rightarrow 8x_3 - 4x_3 = 15 - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = \frac{5}{4}.$$

Determinaremos o valor de y_3 :

$$8x_3 + 10 = 8 \cdot \frac{5}{4} + 10 = 20 = y_3.$$

Daí, o ponto de equilíbrio é $\left(\frac{5}{4}; 20\right)$.



A reta (I) representa o gráfico da função lucro; a reta (II) corresponde ao gráfico da função receita; a reta (III) compreende o gráfico da função custo.

j) Para o arroz:

$0 \leq x < \frac{1}{4}$: excesso de demanda;

$x = \frac{1}{4}$: oferta = demanda;

$x > \frac{1}{4}$: excesso de oferta.

Para a soja:

$0 \leq x < \frac{5}{4}$: excesso de demanda;

$x = \frac{5}{4}$: oferta = demanda;

$x > \frac{5}{4}$: excesso de oferta.

Para o feijão:

$0 \leq x < \frac{1}{3}$: excesso de demanda;

$x = \frac{1}{3}$: oferta = demanda;

$x > \frac{1}{3}$: excesso de oferta.

-) Uma pessoa investe em dois tipos de ações, A e B. Por meio dos dados históricos das ações, o modelo matemático adequado de rentabilidade, para representar cada tipo de ação, é apresentado na tabela a seguir, onde t é medido em meses, com início em outubro/1993.

Tipo de ação	Modelo matemático de rentabilidade (%)
A	$y_1 = 3t + 3$
B	$y_2 = 4t + 6$

Admitindo-se o mesmo modelo antes de outubro/1993, pede-se:

-) A rentabilidade no início da aplicação em $t = 0$ (outubro/1993);
) A rentabilidade após três meses de investimento;
) Quando as ações tiveram a mesma rentabilidade;
) O esboço do gráfico da rentabilidade das ações no mesmo sistema de eixos;
) Um comentário sobre o investimento;
 A previsão de rentabilidade das ações para outubro/1994.

Solução:

) $t = 0$

Ação A – rentabilidade de 3%.

Ação B – rentabilidade de 6%.

) $t = 3$

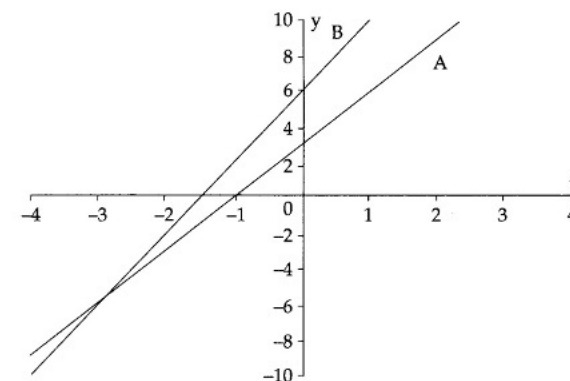
Ação A – $y_1 = 3 \times 3 + 3 = 12\%$.

Ação B – $y_2 = 4 \times 3 + 6 = 18\%$.

) $y_1 = y_2 \Rightarrow 3t + 3 = 4t + 6 \Rightarrow t = -3$

As ações tiveram a mesma rentabilidade em julho/1993.

d)



e) A ação B é mais rentável que a ação A.

f) $t = 12$

Ação A – $y_1 = 3 \times 12 + 3 = 39\%$.

Ação B – $y_2 = 4 \times 12 + 6 = 54\%$.

- 3) Após vários anos de coleta de dados, os pesquisadores concluíram que o modelo matemático adequado para representar a confiabilidade de dois tipos de sensores é dada por $y_1 = -2t + 100$ para o sensor tipo 1, e $y_2 = -t + 100$ para o sensor tipo 2, onde t é medido em anos e y , em %.

Pede-se:

- a) A confiabilidade inicial de cada sensor;
 b) A confiabilidade após cinco anos;
 c) Quando a confiabilidade dos sensores é a mesma;
 d) O esboço do gráfico das curvas no mesmo sistema de eixos;
 e) Um comentário.

Solução:

a) $t = 0$

Para o sensor tipo 1, tem-se:

$$y_1 = -2 \times 0 + 100 = 100\%$$

Para o sensor tipo 2, tem-se:

$$y_2 = -0 + 100 = 100\%$$

$$t = 5$$

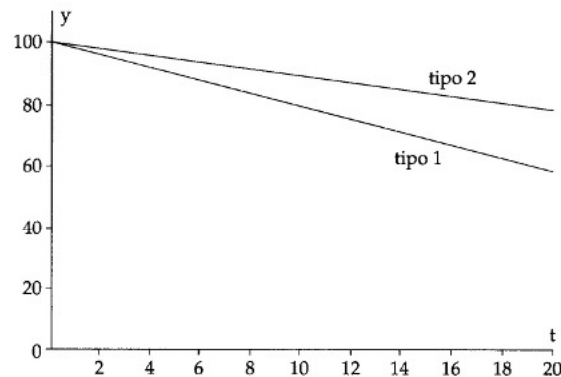
Para o sensor tipo 1, tem-se:

$$y_1 = -2 \cdot 5 + 100 = 90\%$$

Para o sensor tipo 2, tem-se:

$$y_2 = -5 + 100 = 95\%$$

$y_1 = y_2 \Rightarrow -2t + 100 = -t + 100 \Rightarrow t = 0$, isto é, os sensores têm a mesma confiabilidade no início.



O sensor tipo 1 tem maior degradação que o sensor tipo 2.

Duas bactérias são erradicadas com um produto, segundo os modelos matemáticos a seguir, onde t é medido em dias:

$$\begin{cases} y_1 = -t + 40 & (\text{milhões de bactérias do tipo 1}) \\ y_2 = -2t + 60 & (\text{milhões de bactérias do tipo 2}) \end{cases}$$

Pede-se:

A quantidade de bactérias no início da pesquisa;

A quantidade de bactérias após uma semana de pesquisa;

Quando as bactérias terão quantidades iguais;

A previsão para um mês de pesquisa;

O esboço do gráfico de y_1 e y_2 no mesmo sistema de eixos;

Um comentário.

Solução:

a) $t = 0$

Para a bactéria do tipo 1, tem-se:

$$y_1 = 0 + 40 = 40$$

Para a bactéria do tipo 2, tem-se:

$$y_2 = 0 + 60 = 60$$

b) $t = 7$

Para a bactéria do tipo 1, tem-se:

$$y_1 = -7 + 40 = 33$$

Para a bactéria do tipo 2, tem-se:

$$y_2 = -2 \cdot 7 + 60 = 46$$

c) $y_1 = y_2 \Rightarrow -t + 40 = -2t + 60 \Rightarrow t = 20$, isto é, as bactérias terão quantidades iguais após 20 dias.

d) $t = 30$

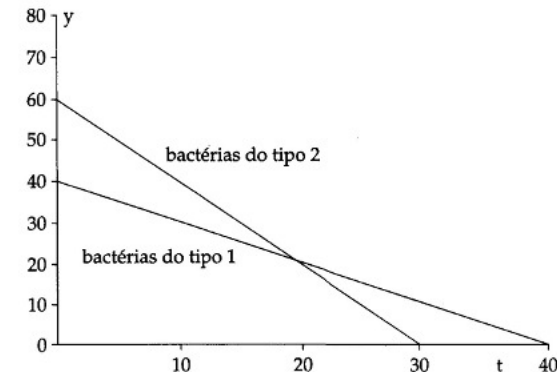
Para a bactéria do tipo 1, tem-se:

$$y_1 = -30 + 40 = 10$$

Para a bactéria do tipo 2, tem-se:

$$y_2 = -2 \cdot 30 + 60 = 0 \text{ (está erradicada)}$$

e)



f) O produto é mais eficaz para bactérias do tipo 2.

5) Considerando-se o estoque estratégico, a soja e o feijão têm produtividade segundo os seguintes modelos matemáticos, onde t é medido em meses:

$$y_1 = 2t + 5 \text{ (milhões de grãos de soja)}$$

e

$$y_2 = 3t + 4 \text{ (milhões de grãos de feijão)}$$

Pede-se a quantidade de grãos:

-) No início do plantio;
-) Dois meses após;
-) Quando as produções terão quantidades iguais;
-) A previsão de dez meses após o início do plantio;
-) O esboço do gráfico de y_1 e y_2 no mesmo sistema de eixos;
-) Um comentário.

olução:

) $t = 0$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot 0 + 5 = 5 \text{ milhões de grãos de soja} \\ y_2 = 3 \cdot 0 + 4 = 4 \text{ milhões de grãos de feijão,} \end{cases}$$

que são o estoque estratégico.

) $t = 2$

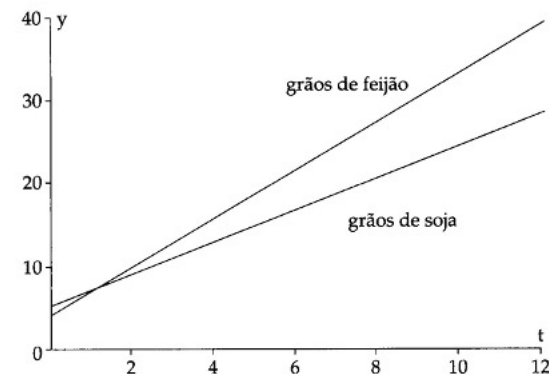
$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot 2 + 5 = 9 \text{ milhões de grãos de soja} \\ y_2 = 3 \cdot 2 + 4 = 10 \text{ milhões de grãos de feijão} \end{cases}$$

) $y_1 = y_2 \Rightarrow 2t + 5 = 3t + 4 \Rightarrow t = 1$, isto é, após um mês de plantio.

) $t = 10$

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cdot 10 + 5 = 25 \text{ milhões de grãos de soja} \\ y_2 = 3 \cdot 10 + 4 = 34 \text{ milhões de grãos de feijão} \end{cases}$$

e)



f) Os grãos de feijão têm maior produtividade.

6) Uma empresa emprega um montante em diversas aplicações financeiras, em setembro/2001. A rentabilidade tem o comportamento segundo os modelos matemáticos apresentados na tabela a seguir, onde t representa mês e y_i , percentual ($i = 1, \dots, 6$):

Tipo de investimento	Modelo matemático
A	$y_1 = 3t + 10$
B	$y_2 = 5t - 2$
C	$y_3 = \frac{t}{2} + 1$
D	$y_4 = -t + 1$
E	$y_5 = 3t + 2$
F	$y_6 = 2t - 3$

Pede-se:

- a) A rentabilidade no início da aplicação;
- b) A rentabilidade em dezembro de 2001;
- c) A previsão para fevereiro de 2002;
- d) Quando a rentabilidade dos investimentos A e C serão iguais;
- e) O esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos A e C e um comentário;
- f) Quando a rentabilidade dos investimentos B e E são iguais;

- j) O esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos B e E e um comentário;
 i) Quando a rentabilidade dos investimentos D e F são iguais;
 j) O esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos D e F e um comentário.

solução:

j) $t = 0$

Tipo de investimento	Rentabilidade em $t = 0$
A	$y_1 = 3 \cdot 0 + 10 = 10$
B	$y_2 = 5 \cdot 0 - 2 = -2$
C	$y_3 = \frac{0}{2} + 1 = 1$
D	$y_4 = -0 + 1 = 1$
E	$y_5 = 3 \cdot 0 + 2 = 2$
F	$y_6 = 2 \cdot 0 - 3 = -3$

j) $t = 3$

Tipo de investimento	Rentabilidade em dez./2001
A	$y_1 = 3 \cdot 3 + 10 = 19$
B	$y_2 = 5 \cdot 3 - 2 = 13$
C	$y_3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$
D	$y_4 = -3 + 1 = -2$
E	$y_5 = 3 \cdot 3 + 2 = 11$
F	$y_6 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

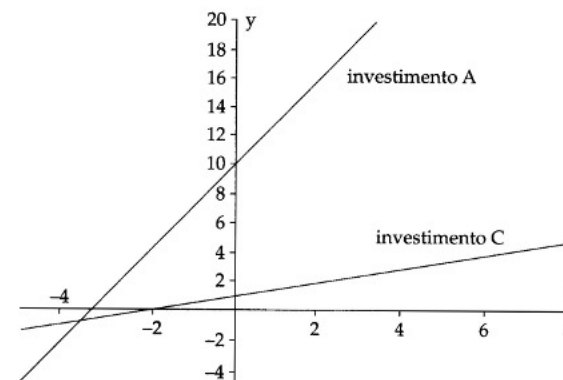
j) $t = 5$

Tipo de investimento	Rentabilidade em fev./2002
A	$y_1 = 3 \cdot 5 + 10 = 25$
B	$y_2 = 5 \cdot 5 - 2 = 23$
C	$y_3 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{7}{2}$
D	$y_4 = -5 + 1 = -4$
E	$y_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
F	$y_6 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

$$d) y_1 = y_3 \Rightarrow 3t + 10 = \frac{t}{2} + 1 \Rightarrow t = -\frac{18}{5} \approx -3,6.$$

Aproximadamente entre junho e julho de 2001, os investimentos tiveram a mesma rentabilidade.

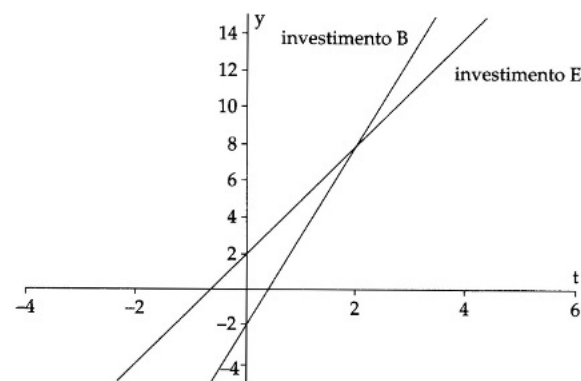
e)



O investimento A é mais rentável.

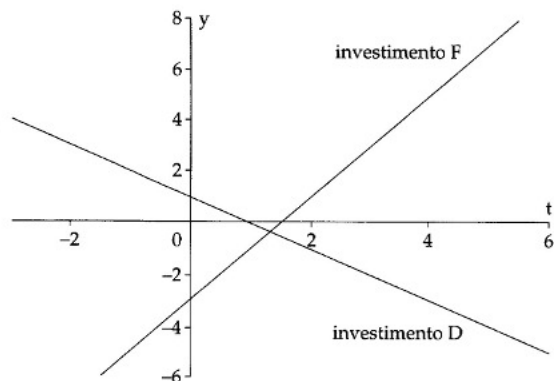
$$f) y_1 = y_5 \Rightarrow 5t - 2 = 3t + 2 \Rightarrow t = 2$$

g)



O investimento E é mais rentável até novembro/2001; a partir de então, o investimento B passa a ser mais rentável.

$$h) y_4 = y_6 \Rightarrow -t + 1 = 2t - 3 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \approx 1,25 \text{ (entre outubro e novembro de 2001).}$$



O investimento F é mais rentável.

Uma empresa tem a função lucro dada por $L_t = x^2 + 4x - 5$. A relação entre preço e quantidade é $y - x - 2 = 0$ (onde x é a quantidade em milhares e y é o preço em 1.000 unidades monetárias). Pede-se:

-) A função receita total;
-) A função custo total;
-) O valor do custo fixo;
-) A função do custo variável;
-) O ponto de equilíbrio;
-) A análise econômica.

Solução:

O preço de venda é $y = x + 2$. Logo, $R_t = (x + 2) \cdot x \Rightarrow R_t = x^2 + 2x$.

$L_t = R_t - C_t \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2x - C_t \Rightarrow C_t = -2x + 5$.

$C_t = -2x + 5$ se $x = 0 \therefore$ custo fixo = 5.000 unidades monetárias.

$C_v = -2x$.

$R_t = C_t \Rightarrow x^2 + 2x = -2x + 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -5$ (não tem significado econômico).

$C_t = -2x_1 + 5 = (-2) \cdot 1 + 5 = 3 = R_t$.

Assim, o ponto de equilíbrio $C_v = R_t = 3$ é alcançado para $x_1 = 1$.

f) $0 \leq x < 1 \Rightarrow$ a empresa tem prejuízo;

$x = 1 \Rightarrow$ a empresa não tem lucro nem prejuízo;

$x > 1 \Rightarrow$ a empresa tem lucro.

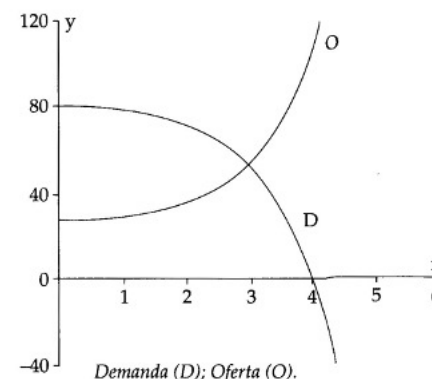
8) As funções de oferta e de demanda de um produto são $y_1 = 81 - 3^x$ e $y_2 = 27 + 3^x$, respectivamente, onde x é quantidade em milhares e y é o preço em 1.000 unidades monetárias. Pede-se:

- a) O ponto de equilíbrio;
- b) O gráfico das funções de oferta e de demanda no mesmo sistema de eixos;
- c) A análise econômica;

Solução:

a) $y_1 = y_2 \Rightarrow 81 - 3^x = 27 + 3^x \Rightarrow 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

b)

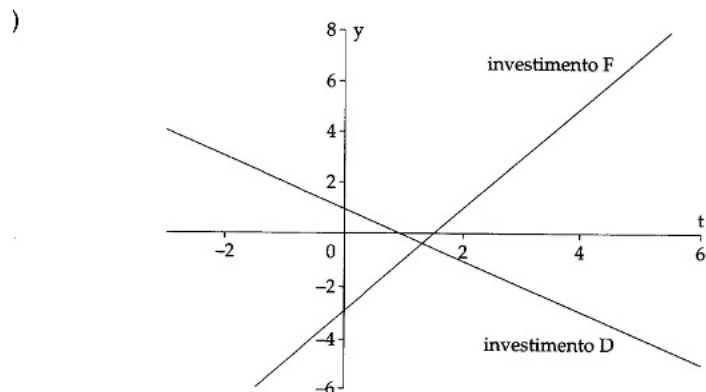


c) $0 \leq x < 3 \Rightarrow$ excesso de demanda;

$x = 3 \Rightarrow$ oferta = demanda;

$x > 3 \Rightarrow$ excesso de oferta.

9) Uma empresa tem a função receita dada por $R_t = x^2 + 3x$ e a função de custo dada por $C_t = 1 + 3^x$ (onde x é quantidade em milhares e C_t o custo em 1.000 unidades monetárias). Sabendo que o equilíbrio entre a receita e o custo se dá no ponto $C_t = R_t = 10$, pede-se:



O investimento F é mais rentável.

) Uma empresa tem a função lucro dada por $L_t = x^2 + 4x - 5$. A relação entre preço e quantidade é $y - x - 2 = 0$ (onde x é a quantidade em milhares e y é o preço em 1.000 unidades monetárias). Pede-se:

-) A função receita total;
-) A função custo total;
-) O valor do custo fixo;
-) A função do custo variável;
-) O ponto de equilíbrio;
-) A análise econômica.

Solução:

) O preço de venda é $y = x + 2$. Logo, $R_t = (x + 2) \cdot x \Rightarrow R_t = x^2 + 2x$.

) $L_t = R_t - C_t \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2x - C_t \Rightarrow C_t = -2x + 5$.

) $C_t = -2x + 5$ se $x = 0 \therefore$ custo fixo = 5.000 unidades monetárias.

) $C_v = -2x$.

) $R_t = C_t \Rightarrow x^2 + 2x = -2x + 5 \Rightarrow x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ou $x_2 = -5$ (não tem significado econômico).

$C_t = -2x_1 + 5 = (-2) \cdot 1 + 5 = 3 = R_t$.

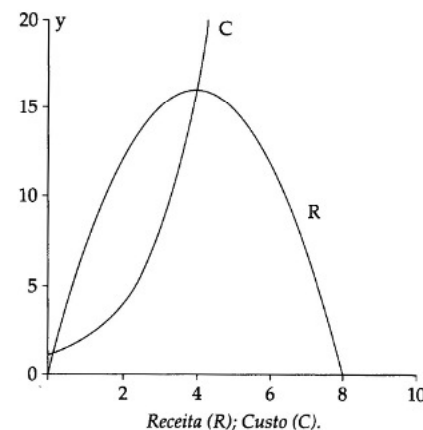
Assim, o ponto de equilíbrio $C_v = R_t = 3$ é alcançado para $x_1 = 1$.

10) As funções de receita (R_t) e de custo (C_t) de uma empresa são $R_t = -x^2 + 8x$ e $C_t = 2^x$ (onde x representa quantidade em milhares e R_t, C_t representam 1.000 unidades monetárias). Sabendo que o ponto de equilíbrio é $R_t = C_t = 16$, pede-se:

- a) A representação gráfica das curvas no mesmo sistema de eixos;
- b) O valor do ponto de equilíbrio;
- c) O valor do custo fixo;
- d) A função lucro total;
- e) O lucro (ou prejuízo) na venda de 5 e 3 unidades do produto.

Solução:

a)



b) $R_t = C_t = 16 \Rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4$.

Logo, o ponto de equilíbrio é $(4; 16)$.

c) $C_t = 2^x$ se $x = 0 \Rightarrow C_t = 1$.

Daí, o custo fixo é de 1.000 unidades monetárias.

d) $L_t = R_t - C_t \Rightarrow (-x^2 + 8x) - (2^x) = -x^2 + 8x - 2^x$.

e) $L_t = -5^2 + 8 \cdot 5 - 2^5 = -25 + 40 - 32 \Rightarrow$ a empresa tem prejuízo;

$L_t = -3^2 + 8 \cdot 3 - 2^3 = -9 + 24 - 8 = 7 \Rightarrow$ a empresa tem lucro.

- 1) Uma empresa produz dois tipos de sorvetes. A demanda é sazonal e foi modelada por $y_{\text{sorvete1}} = 2\text{sen}(2x) + 40$ e $y_{\text{sorvete2}} = \text{sen}(2x) + 20$ (onde x representa quantidade em milhares e y , preço em 1.000 unidades monetárias). A função custo total é $C_{\text{sorvete1}} = 3x + 1$ e $C_{\text{sorvete2}} = 5x + 1$ (onde x representa quantidade e C , preço em milhares). Pede-se:

-) A função receita total da empresa;
-) A função lucro total da empresa;
-) O valor do custo fixo da empresa;
-) O custo variável da empresa.

Solução:

-) A função receita total do sorvete tipo 1 é:

$$R_{\text{sorvete1}} = \text{preço} \times \text{quantidade}$$

$$R_{\text{sorvete1}} = (2\text{sen}(2x) + 40)x = 2x\text{sen}(2x) + 40x$$

A função receita total do sorvete tipo 2 é:

$$R_{\text{sorvete2}} = \text{preço} \times \text{quantidade}$$

$$R_{\text{sorvete2}} = (\text{sen}(2x) + 20)x = x\text{sen}(2x) + 20x$$

A função receita total da empresa é:

$$R_{\text{empresa}} = R_{\text{sorvete1}} + R_{\text{sorvete2}}$$

$$R_{\text{empresa}} = 3x\text{sen}(2x) + 60x$$

-) A função lucro total do sorvete tipo 1 é:

$$L_{\text{sorvete1}} = R_{\text{sorvete1}} - C_{\text{sorvete1}}$$

$$L_{\text{sorvete1}} = 2x\text{sen}(2x) + 40x - (3x + 1) = 2x\text{sen}(2x) + 37x - 1$$

A função lucro total do sorvete tipo 2 é:

$$L_{\text{sorvete2}} = R_{\text{sorvete2}} - C_{\text{sorvete2}}$$

$$L_{\text{sorvete2}} = 2x\text{sen}(2x) + 20x - (5x + 1) = 2x\text{sen}(2x) + 15x - 1$$

A função lucro total da empresa é:

$$L_{\text{empresa}} = L_{\text{sorvete1}} + L_{\text{sorvete2}}$$

$$L_{\text{empresa}} = 2x\text{sen}(2x) + 37x - 1 + 2x\text{sen}(2x) + 15x - 1 = 4x\text{sen}(2x) + 52x - 2$$

- c) Fazendo $x = 0$:

O custo fixo do sorvete tipo 1 é:

$$C_{\text{sorvete1}} = 3x + 1 \Rightarrow C_{\text{sorvete1}} = 1 \text{ em 1.000 unidades monetárias;}$$

O custo fixo do sorvete tipo 2 é:

$$C_{\text{sorvete2}} = 5x + 1 \Rightarrow C_{\text{sorvete2}} = 1 \text{ em 1.000 unidades monetárias.}$$

O custo fixo da empresa é de 2.000 unidades monetárias.

- d) O custo variável do sorvete tipo 1 é $3x$;

O custo variável do sorvete tipo 2 é $5x$;

O custo variável da empresa é $8x$.

- 12) Uma empresa produz dois tipos de refrigerantes, guaraná e soda limonada. A demanda é sazonal e foi modelada por $y_{\text{guaraná}} = 3\cos(7x) + 50$ e $y_{\text{soda limonada}} = \cos(7x) + 60$ (onde x representa quantidade em milhares e y , preço em 1.000 unidades monetárias). A função custo total é $C_{\text{guaraná}} = x + 17$ e $C_{\text{soda limonada}} = 3x + 18$ (onde x representa quantidade e C , preço em milhares). Pede-se:

- a) A função receita total da empresa;
- b) A função lucro total da empresa;
- c) O valor do custo fixo da empresa;
- d) O custo variável da empresa.

Solução:

- a) A função receita total do guaraná é:

$$R_{\text{guaraná}} = \text{preço} \times \text{quantidade}$$

$$R_{\text{guaraná}} = (3\cos(7x) + 50)x = 3x\cos(7x) + 50x$$

A função receita total da soda limonada é:

$$R_{\text{soda limonada}} = \text{preço} \times \text{quantidade}$$

$$R_{\text{soda limonada}} = (\cos(7x) + 60)x = x\cos(7x) + 60x$$

A função receita total da empresa é:

$$R_{\text{empresa}} = R_{\text{guaraná}} + R_{\text{soda limonada}}$$

$$R_{\text{empresa}} = 4x\cos(7x) + 110x$$

-) A função lucro total do guaraná é:

$$L_{\text{guaraná}} = R_{\text{guaraná}} - C_{\text{guaraná}}$$

$$L_{\text{guaraná}} = 3x\cos(7x) + 50x - (x + 17) = 3x\cos(7x) + 49x - 17$$

A função lucro total da soda limonada é:

$$L_{\text{soda limonada}} = R_{\text{soda limonada}} - C_{\text{soda limonada}}$$

$$L_{\text{soda limonada}} = x\cos(7x) + 60x - (3x + 18) = x\cos(7x) + 57x - 18$$

A função lucro total da empresa é:

$$L_{\text{empresa}} = L_{\text{guaraná}} - L_{\text{soda limonada}}$$

$$L_{\text{empresa}} = 3x\cos(7x) + 49x - 17 + x\cos(7x) + 57x - 18 =$$

$$= 4x\cos(7x) + 106x - 35$$

-) Fazendo $x = 0$:

O custo fixo do guaraná é:

$$C_{\text{guaraná}} = x + 17 \Rightarrow C_{\text{guaraná}} = 17 \text{ em 1.000 unidades monetárias;}$$

O custo fixo da soda limonada é:

$$C_{\text{soda limonada}} = 3x + 18 \Rightarrow C_{\text{soda limonada}} = 18 \text{ em 1.000 unidades monetárias;}$$

O custo fixo da empresa é:

$$C_{\text{empresa}} = C_{\text{guaraná}} + C_{\text{soda limonada}}$$

$$C_{\text{empresa}} = 17 + 18 = 35 \text{ em 1.000 unidades monetárias.}$$

-) O custo variável do refrigerante tipo 1 é x .

O custo variável do refrigerante tipo 2 é $3x$.

O custo variável da empresa é $4x$.

0.3 Exercícios propostos

-) Uma empresa emprega um montante em diversas aplicações financeiras, em agosto de 1998. A rentabilidade tem o comportamento segundo os modelos matemáticos apresentados na tabela a seguir, onde t representa mês e y_i , percentual ($i = 1, \dots, 6$):

Tipo de investimento	Modelo matemático
A	$y_1 = 5t + 13$
B	$y_2 = t - 1$
C	$y_3 = \frac{t}{3} + 4$
D	$y_4 = -2t + 7$
E	$y_5 = 4t$
F	$y_6 = t + 2$

Pede-se:

- A rentabilidade no início da aplicação;
 - Em novembro de 1998;
 - Previsão para janeiro de 1989;
 - Quando a rentabilidade dos investimentos A e C serão iguais;
 - Esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos A e C e um comentário;
 - Quando a rentabilidade dos investimentos B e E são iguais;
 - Esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos B e E e um comentário;
 - Quando a rentabilidade dos investimentos D e F são iguais;
 - O esboço do gráfico dos modelos matemáticos correspondentes aos investimentos D e F e um comentário.
- 2) Uma empresa tem a função lucro dada por $L_t = x^2 + 3x - 2$. A relação entre preço e quantidade é $y - x - 4 = 0$ (onde x é a quantidade em milhares e y , o preço em 1.000 unidades monetárias). Pede-se:
- A função receita total;
 - A função custo total;
 - O valor do custo fixo;
 - O valor do custo variável;
 - O esboço do gráfico de L_v , C_t e R_v no mesmo sistema de eixos;
 - O ponto de equilíbrio;
 - A análise econômica.

-) As funções de oferta e de demanda de um produto são, respectivamente, $y_1 = 30 - 5^x$ e $y_2 = 20 + 5^x$. O ponto de equilíbrio $(K; 25)$, onde x é quantidade em milhares e y é preço em 1.000 unidades monetárias. Pede-se:
-) O ponto de equilíbrio;
-) O gráfico das curvas de oferta e de demanda no mesmo sistema de eixos;
-) A análise econômica.
-) Uma empresa tem a função receita dada por $R_t = x^2 + 5x + 7$ e a função de custo dada por $C_t = 7 + 7x$ (onde x é quantidade em milhares e R_t e C_t são representados em 1.000 unidades monetárias). O ponto de equilíbrio é $(K; 21)$. Pede-se:
-) O ponto de equilíbrio;
-) O valor do custo fixo;
-) A função lucro total;
-) O esboço dos gráficos de R_t e C_t no mesmo sistema de eixos;
-) A análise econômica.
-) A função de receita R_t e a função de custo de uma empresa são respectivamente, $R_t = -3 + 3^x$ e $C_t = 2x + 2$ (onde x é quantidade em milhares e R_t e C_t são representados em 1.000 unidades monetárias). O ponto de equilíbrio é $(K; 6)$. Pede-se:
-) O valor do ponto de equilíbrio;
-) O valor do custo fixo;
-) A função lucro total;
-) O gráfico de R_t e C_t no mesmo sistema de eixos;
-) A análise econômica.
-) As funções de Receita (R_t) e Custo (C_t) de uma empresa são $R_t = -x^2 + 10x + 14$ e $C_t = 5^x + 5$ (onde x representa quantidade em milhares e R_t , C_t correspondem a 1.000 unidades monetárias), o ponto de equilíbrio é $(K; 30)$. Pede-se:
- a) A representação gráfica das curvas no mesmo sistema de eixos;
- b) O valor do ponto de equilíbrio;
- c) O valor do custo fixo;
- d) A função lucro total;
- e) O lucro (ou prejuízo) na venda de 5 e 3 unidades do produto.
- 7) Uma empresa produz dois tipos de vestuários de praia. A demanda é sazonal e foi modelada por $y_{\text{tipo1}} = 3\sin(8x) + 30$ e $y_{\text{tipo2}} = \sin(8x) + 90$ (onde x representa quantidade e y , preço em milhares). A função custo total é $C_{\text{tipo1}} = x + 4$ e $C_{\text{tipo2}} = x + 10$ (onde x representa quantidade em milhares e C , preço em 1.000 unidades monetárias). Pede-se:
- a) A representação gráfica das curvas de receita no mesmo sistema de eixos;
- b) A função receita total da empresa;
- c) A função lucro total da empresa;
- d) O valor do custo fixo da empresa;
- e) O custo variável da empresa.
- 8) Uma empresa produz dois tipos de guarda-chuvas. A demanda é sazonal e foi modelada por $y_{\text{tipo1}} = 5\cos(9x) + 30$ e $y_{\text{tipo2}} = \cos(9x) + 50$ (onde x representa quantidade em milhares e y , preço em 1.000 unidades monetárias). A função custo total é $C_{\text{tipo1}} = x + 10$ e $C_{\text{tipo2}} = 2x + 14$ (onde x representa quantidade em milhares e C , preço em 1.000 unidades monetárias). Pede-se:
- a) A representação gráfica das curvas de receita no mesmo sistema de eixos;
- b) A função receita total da empresa;
- c) A função lucro total da empresa;
- d) O valor do custo fixo da empresa;
- e) O custo variável da empresa.

0.4 Respostas dos exercícios propostos

a)

Tipo de investimento	Rentabilidade em $t = 0$
A	13%
B	-1%
C	4%
D	7%
E	0%
F	2%

b)

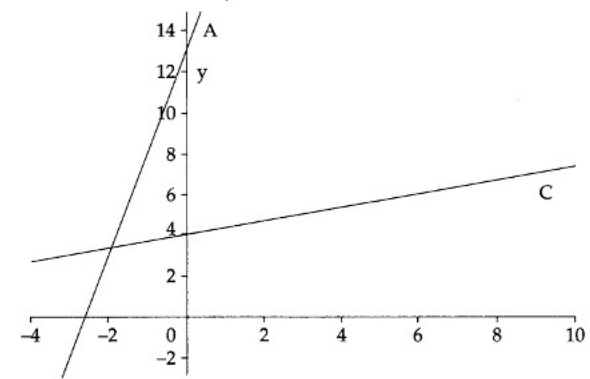
Tipo de investimento	Rentabilidade em $t = 3$
A	28%
B	2%
C	5%
D	1%
E	12%
F	5%

c)

Tipo de investimento	Rentabilidade em $t = 5$
A	38%
B	4%
C	$\frac{17}{3}\%$
D	1%
E	20%
F	7%

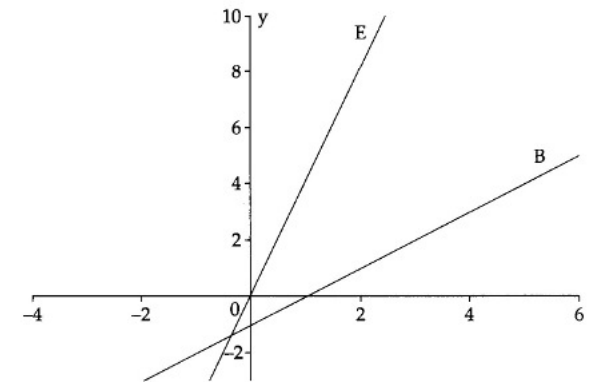
d) A rentabilidade dos investimentos A e C serão iguais em, aproximadamente, julho de 1988.

e)



f) A rentabilidade dos investimentos B e E serão iguais em, aproximadamente, fim de julho de 1988.

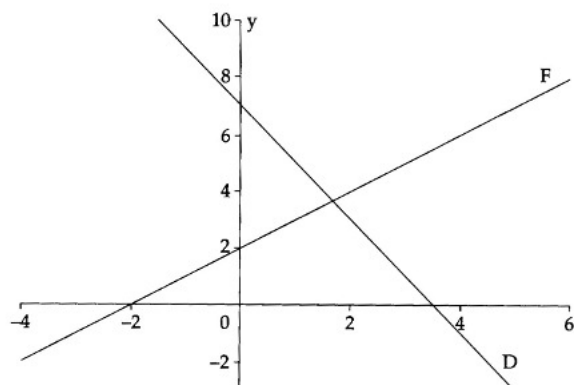
g)



O investimento tipo E é mais rentável.

h) A rentabilidade dos investimentos D e F serão iguais em janeiro de 1989.

i)



O investimento F é mais rentável.

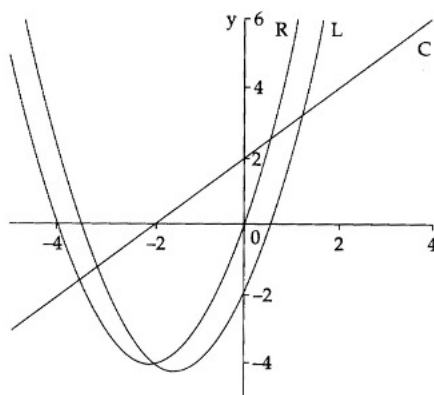
i) a) $R_t = x^2 + 4x$.

b) $C_t = x + 2$.

c) 2.000 unidades monetárias.

d) x em 1.000 unidades monetárias.

e)



f) $(0,56; 2,56)$

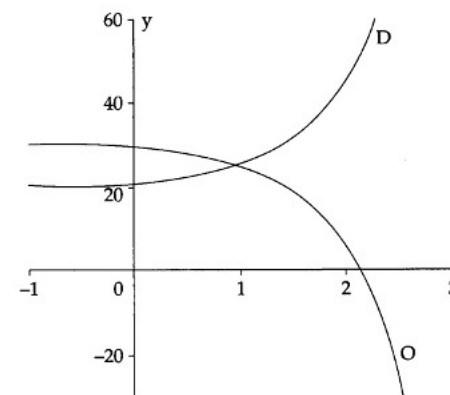
g) $0 \leq x < 0,56 \Rightarrow$ a empresa tem prejuízo;

$x = 0,56 \Rightarrow$ a empresa não tem lucro nem prejuízo;

$x > 0,56 \Rightarrow$ a empresa tem lucro.

3) a) $(1; 25)$.

b)



c) $0 \leq x < 1 \Rightarrow$ excesso de oferta;

$x = 1 \Rightarrow$ oferta = demanda;

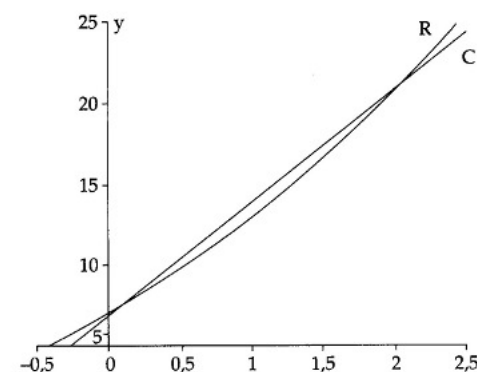
$x > 1 \Rightarrow$ excesso de demanda.

4) a) $(2; 21)$

b) 7.000 unidades monetárias;

c) $L_t = x^2 - 2x$.

d)

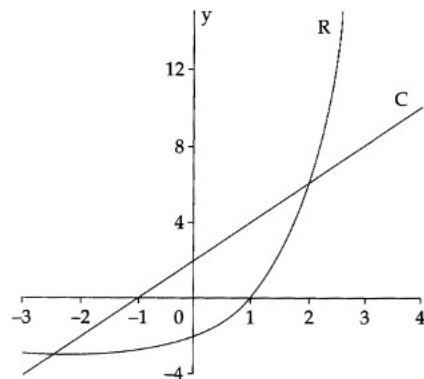


e) $0 \leq x < 2 \Rightarrow$ a empresa tem prejuízo;

$x = 2 \Rightarrow$ a empresa não tem lucro nem prejuízo;

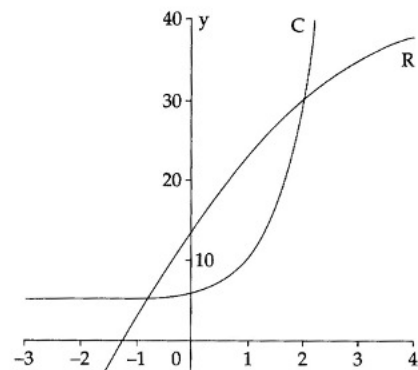
$x > 2 \Rightarrow$ a empresa tem lucro.

- a) $(2; 6)$.
 b) O custo fixo é de 2.000 unidades monetárias;
 c) $L_t = (-3 + 3^x) - (2x + 2)$
 d)



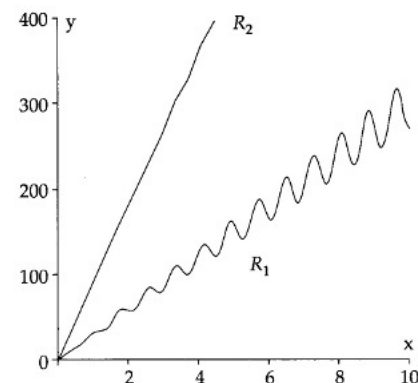
- e) $0 \leq x < 2 \Rightarrow$ a empresa tem prejuízo;
 $x = 2 \Rightarrow$ a empresa não tem lucro nem prejuízo;
 $x > 2 \Rightarrow$ a empresa tem lucro.

a)



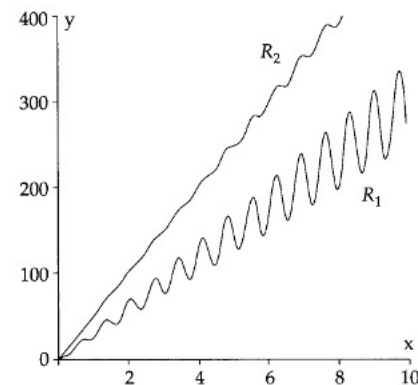
- b) $(2; 30)$;
 c) O custo fixo é de 5.000 unidades monetárias;
 d) $L_t = (-x^2 + 10x + 14) - (5^x + 5)$;
 e) -3.095 e -95 .

- 7) a) $R_1 = 3x \cdot \sin(8x) + 30x$ e $R_2 = x \cdot \sin(8x) + 90x$;



- b) $R_{\text{empresa}} = 4x \sin(8x) + 120x$;
 c) $L_{\text{empresa}} = (4x \sin(8x) + 120x) - (2x + 14)$;
 d) O custo fixo é de 14.000 unidades monetárias;
 e) O custo variável é $2x$.

- 8) a) $R_1 = 5x \cdot \cos(9x) + 30x$ e $R_2 = x \cdot \cos(9x) + 50x$



- b) $R_{\text{empresa}} = 6x \cos(9x) + 80x$;
 c) $L_{\text{empresa}} = (6x \cos(9x) + 80x) - (3x + 24)$;
 d) O custo fixo é de 24.000 unidades monetárias;
 e) O custo variável é $3x$.

Álgebra matricial

O estudo das matrizes tornou-se muito importante pelas várias aplicações em diversos ramos da ciência e da tecnologia, tais como matemática, física, computação, economia etc. Neste capítulo, são definidas as matrizes e operações envolvendo essas aplicações. São considerados tipos particulares de matrizes, a transposta, a inversa e o determinante de uma matriz.

11.1 Definições iniciais

Matriz é um agrupamento retangular de elementos, dispostos em m linhas e n colunas, onde m e n são números inteiros maiores ou iguais a 1.

O *tamanho* (ou *dimensão*) de uma matriz corresponde ao número de linhas e colunas existentes na matriz, por esse motivo denominada matriz (lê-se m por n) ou matriz de *ordem* $m \times n$.

Dada a matriz A do tipo $m \times n$, denomina-se o *elemento* a_{ij} ao componente da matriz que ocupar a linha i e a coluna j , onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Uma matriz é representada da seguinte maneira:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} \text{ ou } A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$$

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 3, \text{ onde:}$$

- $a_{11} = -1$ elemento da linha 1 e coluna 1
 $a_{12} = 5$ elemento da linha 1 e coluna 2
 $a_{13} = 0$ elemento da linha 1 e coluna 3
 $a_{21} = 2$ elemento da linha 2 e coluna 1
 $a_{22} = -4$ elemento da linha 2 e coluna 2
 $a_{23} = 6$ elemento da linha 2 e coluna 3

2. Matrizes especiais

a a matriz $A_{m \times n}$.

Se $m = 1$ e $n > 1$, a matriz $1 \times n$ é chamada *matriz linha*.

$$A_{1 \times n} = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}]$$

Se $m > 1$ e $n = 1$, a matriz $m \times 1$ é denominada *matriz coluna*.

$$A_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Se $m = n$, a matriz $m \times m$ é dita *matriz quadrada de ordem m*.

$$A_{m \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 10 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz } 2 \times 3 \text{ (2 linhas e 3 colunas).}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz coluna } 2 \times 1 \text{ (2 linhas e 1 coluna).}$$

$$[8 \ -1 \ 3] \text{ é uma matriz linha } 1 \times 3 \text{ (1 linha e 3 colunas).}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 13 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz quadrada de ordem 2.}$$

d) *Diagonal principal* de uma matriz quadrada é o conjunto de elementos dessa matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $i = j$.

e) *Diagonal secundária* de uma matriz quadrada é o conjunto de elementos dessa matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, tais que $i + j = n + 1$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

diagonal principal
 diagonal secundária

f) *Matriz diagonal* é uma matriz quadrada, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, isto é todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos

Exemplo:

$$\text{A matriz } A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ é uma matriz diagonal cujos elementos da}$$

diagonal principal são: $a_{11} = 10$, $a_{22} = 0$ e $a_{33} = -3$.

g) *Matriz nula* é a matriz em que todos os seus elementos são nulos.

Notação: $0_{m \times n}$.

Exemplo:

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

h) *Matriz identidade* é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais são todos nulos.

Notação: I_n , onde n indica a ordem da matriz.

emplo:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 Igualdade de matrizes

As matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$.

Exemplos:

Para determinar as variáveis a seguir, de forma que as matrizes A e B sejam iguais:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ x & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & y \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 = y \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} x+2 & 3 \\ 3 & 3y-1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4y+3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+2=7 \\ 3y-1=4y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 2 & y+2 \\ z-5 & t \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 3y-x-1 \\ -5 & y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y+2=3y-x-1 \\ z-5=-5 \\ t=y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y+2=3y+4 \\ z=0 \\ t=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ 2y=-2 \\ z=0 \\ t=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \\ z=0 \\ t=-1 \end{cases}$$

1.4 Adição de matrizes

Das duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, denomina-se *soma* ou *adição* da matriz A com a matriz B , e indicada por $A + B$, a matriz $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplos:

$$1) \text{ Sejam } A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } A + B = \begin{bmatrix} -5+2 & -8+(-4) & 1+4 \\ 4+(-6) & 0+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$2) \text{ Sejam } A = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } A + B = \begin{bmatrix} 7+(-4) \\ -5+1 \\ -\frac{3}{2}+(-\frac{1}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Propriedades:

Se A , B e C são matrizes de mesma ordem ($m \times n$), então valem as seguintes propriedades:

- a) *Comutativa* $\Rightarrow A + B = B + A$
- b) *Associativa* $\Rightarrow (A + B) + C = A + (B + C)$
- c) *Elemento neutro* $\Rightarrow A + 0 = 0 + A = A$
- d) *Elemento oposto ou simétrico* $\Rightarrow A + (-A) = (-A) + A = 0$

Definição: Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, chama-se *matriz oposta de A* a matriz B , tal que $A + B = 0$.

Notação: $B = -A$.

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} -4 & 13 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}, \text{ então } -A = \begin{bmatrix} 4 & -13 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}.$$

definição: Dadas duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, denomina-se **diferença** da matriz A com a matriz B , e indicada por $A - B$, a matriz soma A com a oposta de B ($A - B = A + (-B)$).

Exemplos:

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+4 \\ -5+(-1) \\ -\frac{3}{2}+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -6 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Daí, } A - B = \begin{bmatrix} -5+(-2) & -8+4 & 1+(-4) \\ 4+6 & 0+(-3) & 3+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & -3 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

11.5 Multiplicação de um escalar por uma matriz

O produto de um escalar (ou número real) k pela matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, cuja operação é $k \cdot A$, é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por k ($k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}$).

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Vamos calcular } 5A \text{ e } (-3)A:$$

$$5A = 5 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot (-5) & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 8 & 5 \cdot 9 \\ 5 \cdot 7 & 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 10 \\ 40 & 45 \\ 35 & 5 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$(-3)A = (-3) \cdot \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 8 & 9 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3) \cdot (-5) & (-3) \cdot 2 \\ (-3) \cdot 8 & (-3) \cdot 9 \\ (-3) \cdot 7 & (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -6 \\ -24 & -27 \\ -21 & -3 \end{bmatrix}$$

11.6 Matriz transposta

Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, denomina-se **transposta** de A a matriz $B = [b_{ji}]_{n \times m}$, tal que $b_{ji} = a_{ij}$, $\forall i, j$, $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Para determinar a matriz transposta da matriz A , basta trocar suas linhas por colunas ou suas colunas por linhas. A notação utilizada é A^t ou A' .

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}. \text{ Daí, } A^t = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 5 \end{bmatrix}_{2 \times 3}.$$

Propriedades:

- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$; $k \in \mathbb{R}$
- $(A^t)^t = A$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Observação: Essa última propriedade trabalha com produto de matrizes, um tópico que veremos adiante.

definição: Uma matriz é dita *simétrica* se for quadrada e $A = A^t$.

Exemplo:

$$= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = A^t$$

definição: Uma matriz é dita *anti-simétrica* se for quadrada e $A = -A^t$.

Exemplo:

$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 9 \\ 3 & -9 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -9 \\ -3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

1.7 Produto de matrizes

Sejam duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, chama-se *produto* de A por B a matriz $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, tal que:

$$C = [c_{ik}]_{m \times p} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot b_{jp} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot b_{jp} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{i(n-1)} \cdot b_{(n-1)k} + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Observe que só é possível multiplicar duas matrizes se o número de colunas da primeira matriz (A) for igual ao número de linhas da segunda matriz (B). A matriz resultante tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B.

Exemplo:

$$\text{Sejam } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}. \text{ Vamos determinar } A \cdot B \text{ e } B \cdot A.$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-6) + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-6) + (-4) \cdot 3 & 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -3 \\ -30 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-6) \cdot (-2) + 2 \cdot 3 & (-6) \cdot 1 + 2 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -14 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Note que $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Propriedades:

- a) *Associativa* $\Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- b) *Distributiva em relação à adição* $\Rightarrow A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
 $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- c) *Elemento neutro* $\Rightarrow A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$
- d) $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$, onde k é um escalar.

Observações:

- a) Em geral, $A \cdot B \neq B \cdot A$.
- b) Se $A \cdot B = 0$, não necessariamente, $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ (-4) \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) & (-4) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.8 Inversa de uma matriz

Uma matriz quadrada A , de ordem n , se diz *invertível* se existir uma matriz B , tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. A matriz B é dita inversa de A . Uma matriz não invertível é denominada *singular*.

Notação: $B = A^{-1}$

Exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, definamos a inversa de A como $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I$.

Assim,

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+c=1 \\ 4a+3c=0 \\ 2b+d=0 \\ 4b+3d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1-2a & \text{(I)} \\ 4a+3c=0 & \text{(II)} \\ d=-2b & \text{(III)} \\ 4b+3d=1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo as equações (I) em (II) e (III) em (IV), temos:

$$c = 1 - 2a \quad \text{(I)}$$

$$4a + 3 \cdot (1 - 2a) = 0 \quad \text{(II)}$$

$$d = -2b \quad \text{(III)}$$

$$4b + 3 \cdot (-2b) = 1 \quad \text{(IV)}$$

$$\text{Da equação (II), } 4a + 3 - 6a = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Substituindo na equação (I), } c = 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1 - 3 \Rightarrow c = -2.$$

$$\text{Da equação (IV), } 4b - 6b = 1 \Rightarrow 2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Substituindo na equação (III), } d = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d = 1.$$

$$\text{Logo, a inversa da matriz } A \text{ é a matriz } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

11.9 Determinante de uma matriz

O *determinante* de uma matriz é um escalar obtido dos elementos da matriz, mediante operações específicas. Os determinantes são definidos somente para matrizes quadradas.

$$\text{Indicamos o determinante da matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ por:}$$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

11.9.1 Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz $A = [a_{11}]$ é dado por $\det A = a_{11}$.

Exemplo:

$$A = [-8] \Rightarrow \det A = -8$$

11.9.2 Determinante de 2ª ordem

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Isto é, o determinante de uma matriz de 2ª ordem é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) - (-3) \cdot 5 = 9$$

11.9.3 Determinante de 3ª ordem

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ é dado por:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 0 \cdot (-2) + (-3) \cdot 6 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot 0 \cdot (-1) - 5 \cdot 6 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 \cdot (-2) =$$

$$= 0 + 18 - 6 + 0 - 90 - 12 = -90$$

Podemos utilizar um dos dois métodos, descritos a seguir, para simplificar essa memorização:

- Regra de Sarrus;
- Teorema de Laplace.

Regra de Sarrus

A Regra de Sarrus é utilizada, unicamente, para determinantes de matrizes de 3ª ordem.

Repetimos, ao lado da matriz, as duas primeiras colunas dessa matriz.

Os termos precedidos pelo sinal “+” são obtidos multiplicando-se os elementos segundo as flechas situadas na direção da diagonal principal: $a_{11}a_{22}a_{33}$; $a_{12}a_{23}a_{31}$; $a_{13}a_{21}a_{32}$.

Os termos precedidos pelo sinal “-” são obtidos multiplicando-se os elementos de acordo com as setas situadas na direção da diagonal secundária: $-a_{13}a_{22}a_{31}$; $-a_{11}a_{23}a_{32}$; $-a_{12}a_{21}a_{33}$.

Observe o esquema a seguir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemplo:

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 18 - 6 + 0 - 90 - 12 = -90$$

Teorema de Laplace

O Teorema de Laplace é utilizado para determinantes de matrizes de ordem $n \geq 2$.

Para iniciarmos esse teorema, vamos definir, primeiramente, o que é um *cofator*.

Definição: Determinantes de matrizes de ordem superior a 3 serão aqui resolvidos por um procedimento conhecido como expansão de cofatores.

Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Eliminando-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna da matriz, obtém-se outra matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$, representada por $M = [a_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$. O determinante dessa matriz é denominado *menor* da matriz A . O escalar $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{ij}|$ é chamado *cofator* da matriz A .

Exemplos:

) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa matriz são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |4| = 4; \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |3| = -3;$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |2| = -2; \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |1| = 1;$$

) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Os cofatores relativos a todos os elementos dessa

matriz são:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (45 - 48) = -3;$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (36 - 42) = 6;$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (32 - 35) = -3;$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -1 \cdot (18 - 24) = 6;$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 21) = -12;$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -1 \cdot (8 - 14) = 6;$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (12 - 15) = -3;$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 12) = 6;$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 8) = -3.$$

O determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, com $n \geq 2$, pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna da matriz A pelos respectivos cofatores, isto é:

a) Fixando a coluna j , temos: $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij}$;

b) Fixando a linha i , temos: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot C_{ij}$.

Exemplos:

1) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Primeiramente vamos escolher uma linha qualquer ou uma coluna qualquer para ser fixada (para fazer menos cálculos, podemos determinar a linha ou coluna que tenha mais "zeros").

Fixemos, por exemplo, a 1ª linha.

$$\det A = \sum_{j=1}^3 a_{1j} \cdot C_{1j} = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + a_{13} \cdot C_{13}, \text{ onde:}$$

$$a_{11} = 6, \quad a_{12} = 1 \text{ e } a_{13} = 0.$$

Retirando a 1ª linha e 1ª coluna,

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-9 - 8) = -17;$$

Retirando a 1ª linha e 2ª coluna,

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (6 - 20) = 14;$$

Retirando a 1ª linha e 3ª coluna,

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4 - 15) = -19.$$

Daí,

$$\det A = 6 \cdot (-17) + 1 \cdot 14 + 0 \cdot (-19) = -102 + 14 + 0 = -88$$

!) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ -3 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Como essa matriz tem ordem maior que 3, só calculamos seu determinante por meio dos cofatores.

Fixemos, por exemplo, a 3ª coluna.

Assim, o determinante da matriz A será:

$$\det A = \sum_{i=1}^4 a_{i3} \cdot C_{i3} = a_{13} \cdot C_{13} + a_{23} \cdot C_{23} + a_{33} \cdot C_{33} + a_{43} \cdot C_{43}, \text{ onde:}$$

$$a_{13} = 3, a_{23} = -2, a_{33} = 1 \text{ e } a_{43} = 0.$$

Retirando a 1ª linha e 3ª coluna,

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 + 0 + 75 - (-120 - 0 + 6)) = 189;$$

Retirando a 2ª linha e 3ª coluna,

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-8 + 0 + 60 - (-96 - 0 - 12)) = -160;$$

Retirando a 3ª linha e 3ª coluna,

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 + 60 - 0 - (-18 - 25 + 0)) = 101;$$

Retirando a 4ª linha e 3ª coluna,

$$C_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 - 30 - 0 - (12 - 20 + 0)) = 22.$$

Daí,

$$\det A = 3 \cdot 189 + (-2) \cdot (-160) + 1 \cdot 101 + 0 \cdot 22 = 988.$$

Propriedades:

- 1) Quando todos os elementos de uma linha ou coluna são nulos, o determinante dessa matriz será zero.
- 2) Quando duas linhas ou colunas são iguais, o determinante dessa matriz será zero.
- 3) Quando duas linhas ou colunas são proporcionais (uma múltipla da outra), o determinante dessa matriz será zero.
- 4) Quando os elementos de uma linha (coluna) forem combinações lineares dos elementos correspondentes das outras linhas (colunas), o determinante dessa matriz será zero.
- 5) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.
- 6) Quando os elementos de uma linha (coluna) forem multiplicados por um número real, o determinante dessa matriz será multiplicado por este número.
- 7) Se $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times n}$, então $\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$. Dessa

propriedade conclui-se que: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$, pois $A \cdot A^{-1} = I_n$.

- 8) Seja $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$. $\det(kA) = k^n \cdot \det(A)$.

11.10 Exercícios resolvidos

- 1) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$, com $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = -3$ para $i = j$.

Solução:

A matriz do tipo 4×3 tem 4 linhas e 3 colunas dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Como $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, os elementos $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ e a_{43} são todos zero; como $a_{ij} = -3$ para $i = j$, os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} são (-3) .

Assim, a matriz A se torna:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Determinar x e y, tais que $A = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = 7 \end{cases} \rightarrow x = 3y + 7.$$

Resolvendo o sistema por substituição, temos:

$$2(3y + 7) + y = 4 \Rightarrow y = -\frac{10}{7} \Rightarrow x = 3\left(-\frac{10}{7}\right) + 7 = \frac{19}{7}$$

3) Determinar x, y e z, tais que $A = B^t$, sendo $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x & -5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} y & 3 \\ z & -5 \end{bmatrix}$.

Solução:

Se $B = \begin{bmatrix} y & 3 \\ z & -5 \end{bmatrix}$, então $B^t = \begin{bmatrix} y & z \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$.

Como $A = B^t$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ x & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases}$

4) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$, determine:

a) $A + B$

b) $B + A$

c) $A - B$

d) $B - A$

e) $A^t + B^t$

f) $(A + B)^t$

Solução:

a) $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 5+(-3) \\ -2+(-6) & -4+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

b) $B + A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 & -3+5 \\ -6+(-2) & 7+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 5-(-3) \\ -2-(-6) & -4-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$

d) $B - A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & -3-5 \\ -6-(-2) & 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$

e) $A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

f) $(A + B)^t = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5) Calcular $A + B$, sendo $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n+1 & p \\ x-2 & y & z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-a & -b & -c \\ -m & -n & -p \\ -x+2 & -y & -z+1 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n+1 & p \\ x-2 & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-a & -b & -c \\ -m & -n & -p \\ -x+2 & -y & -z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1-a & b-b & c-c \\ m-m & n+1-n & p-p \\ x-2-x+2 & y-y & z-z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

6) Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 13 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$. Determine:

a) $A - B$

b) $A - B + C$

c) $B + A$

d) A matriz $X_{3 \times 2}$, tal que $X + (A - B) = C$.

olução:

) A matriz $(-B)$ é $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$. Assim,

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 13 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 12 & 0 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}.$$

) Para determinarmos $A - B + C$, somaremos a matriz encontrada em (a) com a matriz C:

$$A - B + C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 12 & 0 \\ 2 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 12 & 3 \\ 3 & -14 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 13 & 1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 14 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

) Utilizando as propriedades de matrizes, temos:

$$X + (A - B) = C \Rightarrow X = -A + B + C.$$

$$\text{Daí, } X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -13 & -1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -12 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

) Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, determine:

-2A

3A + 6B

4A^t - 3B^t

olução:

$$-2A = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 9 \\ (-2) \cdot (-7) & (-2) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -18 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3A + 6B &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ -21 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 18 & -24 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 27 \\ -3 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Como $A^t = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^t = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{aligned} 4A^t - 3B^t &= 4 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -28 \\ 36 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 19 & -37 \\ 36 & 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8) Se $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes X e Y, tais que

$$X + Y = A + B \text{ e } 2X - Y = A - B.$$

Solução:

Seja o sistema $\begin{cases} X + Y = A + B \\ 2X - Y = A - B \end{cases}$. Somando-se as duas equações, temos:

$$3X = 2A \Rightarrow X = \frac{2}{3}A \Rightarrow X = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Da primeira equação do sistema, temos:

$$Y = A + B - X \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = X$$

9) Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$. Determine $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

Solução:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) & 4 \cdot 1 + 5 \cdot 4 & 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & -3 \\ -7 & 24 & -24 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 5 \\ (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + (-4) \cdot 4 & (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + (-4) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -23 \end{bmatrix}$$

1) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Determine:

a) $A^t \cdot A$

b) $A \cdot B^t$

Solução:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A^t \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) & 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & -11 & 2 \\ -11 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad A \cdot B^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 \\ 4 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & 4 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$$

11) Seja $A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determinar:

a) A^2

b) $A^2 - 3A$

Solução:

$$a) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 - 10 & -35 - 15 \\ 14 + 6 & -10 + 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & -50 \\ 20 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Utilizando o resultado encontrado em (a),

$$A^2 - 3A = \begin{bmatrix} 39 & -50 \\ 20 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21 & 15 \\ -6 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & -35 \\ 14 & -10 \end{bmatrix}$$

12) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X , tal que $X \cdot A = B$.

Solução:

Como $B_{2 \times 2}$, então X também é uma matriz 2×2 . Seja $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\text{Daí, } X \cdot A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a & a+2b \\ 3c & c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a = -1 & \text{(I)} \\ a + 2b = 1 & \text{(II)} \\ 3c = 4 & \text{(III)} \\ c + 2d = 0 & \text{(IV)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} & \text{(I)} \\ a + 2b = 1 & \text{(II)} \\ c = \frac{4}{3} & \text{(III)} \\ c + 2d = 0 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) e (III) em (IV), temos:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3} \\ d = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Determinar a inversa das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ção:

$$\text{Seja } A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ tal que } A \cdot A^{-1} = I.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2a - 4c & 2b - 4d \\ 5a + 3c & 5b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 4c = 1 \\ 5a + 3c = 0 \\ 2b - 4d = 0 \\ 5b + 3d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 4c = 1 & \text{(I)} \\ a = -\frac{3c}{5} & \text{(II)} \\ b = 2d & \text{(III)} \\ 5b + 3d = 1 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo a equação (II) na equação (I), temos:

$$2 \cdot \left(-\frac{3c}{5}\right) - 4c = 1 \Rightarrow -6c - 20c = 5 \Rightarrow 26c = -5 \Rightarrow c = -\frac{5}{26}$$

$$\text{Substituindo na equação (II), } a = \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{26}\right) \Rightarrow a = \frac{3}{26}$$

Substituindo a equação (III) na equação (IV), temos:

$$5 \cdot 2d + 3d = 1 \Rightarrow 13d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{13}$$

$$\text{Substituindo na equação (III), } b = 2 \cdot \frac{1}{13} \Rightarrow b = \frac{2}{13}$$

$$\text{Daí, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ -\frac{5}{26} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

$$\text{b) Seja } B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \text{ tal que } B \cdot B^{-1} = I.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -a + 3d - 2g & -b + 3e - 2h & -c + 3f - 2i \\ 2a + 5d + 0g & 2b + 5e + 0h & 2c + 5f + 0i \\ 0a + 0d + 1g & 0b + 0e + 1h & 0c + 0f + 1i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -4 & -11 & 6 \\ -6 & 23 & 35 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } -20$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 16 & -9 \\ 20 & 28 & -18 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} -15 & 20 & 5 \\ 18 & -24 & -6 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

c) Não existe o produto

$$\text{f) } \begin{bmatrix} -15 & -6 & 19 \\ -19 & -9 & 11 \\ 18 & 21 & 22 \end{bmatrix}$$

$$\text{a) } A \times B = \begin{bmatrix} 14 & 27 \\ 24 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } (B \times A)^t = \begin{bmatrix} -13 & 27 \\ 6 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } A^2 = \begin{bmatrix} 37 & -4 \\ -7 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } A^2 - 3B = \begin{bmatrix} 31 & -1 \\ -22 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A \times B \times A = \begin{bmatrix} 147 & 110 \\ -37 & 106 \end{bmatrix}$$

$$\text{f) } A \times A^t = \begin{bmatrix} 25 & -13 \\ -13 & 53 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + 2A - 3I_2 = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A \times B^t = \begin{bmatrix} -8 & -4 & -12 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$14) \text{ a) } \det A = -41$$

$$\text{f) } \det A = 0$$

$$\text{b) } \det A = 0$$

$$\text{g) } \det A = 420$$

$$\text{c) } \det A = -32$$

$$\text{h) } \det A = 70$$

$$\text{d) } \det A = 50$$

$$\text{i) } \det A = -12$$

$$\text{e) } \det A = 119$$

$$15) \det(A \times B) = 484$$

capítulo 12

Sistemas lineares

No capítulo anterior, foram estudadas as matrizes e algumas de suas operações. Neste capítulo, aplicaremos matrizes para a resolução de sistemas de equações lineares, o que pode ser feito por meio da Regra de Cramer ou escalonamento de matriz.

12.1 Introdução

Seja S um sistema de m equações lineares ($m \geq 1$) e com n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, onde a_{ij} é o coeficiente da incógnita x_j e c_i , o termo independente. Esse sistema pode ser representado da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Esse sistema pode ser escrito, na forma matricial, como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \text{ ou } A \cdot X = C$$

Exemplos:

1) $S = \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$ pode ser escrito, na forma matricial, como

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$S = \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 3x + y - 7z = 2 \end{cases} \text{ pode ser escrito como } \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

12.2 Matrizes de um sistema

matriz incompleta, associada ao sistema anterior, é $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$,

formada somente pelos coeficientes das incógnitas do sistema.

A matriz completa (ou matriz ampliada), associada ao sistema anterior, é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array} \right], \text{ formada pelos coeficientes das incógnitas e}$$

pelos termos independentes do sistema.

Exemplos:

Seja $S = \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$. Daí, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Seja $S = \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 5 \\ 3x + y - 7z = 2 \end{cases}$. Daí, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$.

12.3 Solução de um sistema linear

denomina-se *solução do sistema S* a n-upla ordenada de números reais $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, tal que:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = c_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = c_m \end{cases}$$

Quando $C = 0$, ou seja, $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, dizemos que

o sistema é *homogêneo*.

É natural observar que um sistema homogêneo admite *sempre*, com solução, a sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, onde $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \dots, n$.

Se um sistema S admitir uma única solução, diremos que ele é *possível (compatível) e determinado*; se ele admitir várias soluções, ele é *possível (compatível) e indeterminado*; se ele não admitir solução, ele é *impossível (incompatível)*.

Exemplos:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$

é um sistema possível e determinado (única solução: $x = 2$ e $y = 3$).

2) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$

é um sistema possível e indeterminado (infinitas soluções: $y = 7 - 2x$ isto é, para cada valor diferente de x , y admite um valor diferente).

3) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

é um sistema impossível (nenhuma solução; divida a 2ª equação por 2 e conclua você mesmo).

12.4 Determinante do sistema

Quando o número de equações de um sistema linear for igual ao número de incógnitas ($m = n$), então a matriz incompleta será quadrada. Daí existe um determinante $D = \det(A)$, denominado *determinante do sistema*.

Se $D = \det(A) \neq 0$, o sistema é possível e determinado; se $D = \det(A) = 0$, o sistema ou possui infinitas soluções ou não tem solução.

mplos:

$$\text{ieja } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Daí, o sistema possível e determinado (única solução: $x = 2$ e $y = 3$).

$$\text{ieja } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, ou o sistema é possível e indeterminado ou é impossível. Nesse caso, ele é possível e indeterminado (infinitas soluções: $y = 7 - 2x$).

$$\text{ieja } \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, ou o sistema é possível e indeterminado ou é impossível. Nesse caso, ele é impossível.

5 Regra de Cramer

resolução de sistemas de equações, onde a matriz A é quadrada, usamos uma regra prática conhecida pelo nome de *Regra de Cramer*, permite encontrar facilmente a solução.

$$\text{ieja o sistema } S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

O valor de cada incógnita (x_i) é obtido da seguinte maneira:

$$x_i = \frac{Dx_i}{D}$$

$x_i \Rightarrow$ variáveis do sistema;

$D \Rightarrow$ determinante formado pelos coeficientes das incógnitas (determinante do sistema);

$Dx_i \Rightarrow$ determinante que se obtém substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita procurada pelos termos (independentes) conhecidos $c_1, \dots, c_n$.

Em outras palavras:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \dots;$$

$$Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

Exemplos:

$$1) \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11 \neq 0 \Rightarrow \text{existe solução}$$

única.

$$Dx = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \Rightarrow x = \frac{Dx}{D} = \frac{11}{11} = 1$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11 \Rightarrow y = \frac{Dy}{D} = \frac{-11}{11} = -1$$

$$2) \begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 4x - 2y + 3z = 0 \\ -x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 - 3 - 12 - (-2 + 27 + 8) = -60 \neq 0 \Rightarrow$$

existe solução única.

$$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 9 - 0 - (6 + 9 + 0) = -10 \Rightarrow x = \frac{Dx}{D} = \frac{-10}{-60} = \frac{1}{6}$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 12 - (0 + 27 + 8) = -50 \Rightarrow y = \frac{Dy}{D} = \frac{-50}{-60} = \frac{5}{6}$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 0 + 12 - (2 + 0 + 12) = -20 \Rightarrow z = \frac{Dz}{D} = \frac{-20}{-60} = \frac{1}{3}$$

Se o sistema é homogêneo, a n-upla $(0; 0; \dots; 0)$ é uma solução desse sistema S e é chamada solução trivial. As demais soluções (quando houver) são denominadas não-triviais.

Se $D = \det(A) \neq 0$, então o sistema homogêneo S possui apenas a solução trivial. Se $D = \det(A) = 0$, o sistema possui a solução trivial e as soluções não-triviais.

12.6 Sistemas equivalentes

Dois sistemas S e S' são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto-solução. Para indicar que S e S' são equivalentes, escreve-se: $S \sim S'$.

Por meio de operações matemáticas triviais, pode-se transformar um sistema complicado S em um sistema mais simples, S' .

Propriedades:

Trocando as posições de duas das equações de S , tem-se $S \sim S'$.

Exemplo:

Multiplicar a 1ª equação com a 3ª:

$$S = \begin{cases} 3x + y - z = 1 & (1) \\ 4x - 2y + 3z = 0 & (2) \\ -x + 3y + 2z = 3 & (3) \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} -x + 3y + 2z = 3 & (3) \\ 4x - 2y + 3z = 0 & (2) \\ 3x + y - z = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\text{ou } \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

2) Multiplicando uma ou mais equações de S , por um número real não nulo, tem-se $S \sim S'$.

Exemplo:

Multiplicar a 2ª equação por 3.

$$S = \begin{cases} 3x + y = 1 & (1) \\ 4x - 5y = 3 & (2) \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} 3x + y = 1 & (1) \\ 12x - 15y = 9 & 3 \cdot (2) \end{cases}$$

$$\text{ou } \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 12 & -15 & 9 \end{array} \right]$$

3) Adicionando a uma das equações de S , outra equação desse sistema multiplicada por k , $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

Adicionar a 1ª equação o produto da 2ª por (-2) .

$$S = \begin{cases} -x + 2y = 1 & (1) \\ 2x - 5y = -3 & (2) \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} -5x + 12y = 7 & (1) + (2) \cdot (-2) \\ 2x - 5y = -3 & (2) \end{cases}$$

$$\text{ou } \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -5 & 12 & 7 \\ 2 & -5 & -3 \end{array} \right]$$

12.7 Escalonamento de sistemas

Para resolver sistemas de equações lineares que tenham mais de três equações, não é indicado utilizar a Regra de Cramer, pois será muito trabalhoso. Nesse caso, usa-se a técnica do escalonamento, para facilitar a resolução do sistema.

a) Se o sistema linear, da seguinte forma:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases},$$

de existe, pelo menos, um coeficiente não nulo em cada equação. Se o mero de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, menta de equação para equação, então o sistema está escalonado.

Exemplos:

$$S = \begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 7y = -4 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -2 & 5 & | & 1 \\ 0 & 7 & | & -4 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 1 \\ 7y - z = -6 \\ 2z = 5 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2 & -5 & 3 & | & 1 \\ 0 & 7 & -1 & | & -6 \\ 0 & 0 & 2 & | & 5 \end{bmatrix}$$

Procedimentos para escalonar um sistema:

Colocar como 1ª equação uma das que tenha o coeficiente da 1ª incógnita diferente de zero;

Anular todos os coeficientes da 1ª incógnita nas demais equações, utilizando as propriedades de sistemas equivalentes;

Anular todos os coeficientes da 2ª incógnita nas equações a partir da 3ª;

Repetir esse processo com as demais incógnitas, até que o sistema se torne escalonado.

Exemplos:

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -x + 5y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 5 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Trocar de posição a 1ª e a 2ª equações ou $L_1 \leftrightarrow L_2$.

$$\begin{cases} -x + 5y = 2 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 5 & | & 2 \\ 3 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Substituir a 2ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por 3 com a 2ª equação, ou $L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1$.

$$\begin{cases} -x + 5y = 2 \\ 16y = 7 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 5 & | & 2 \\ 0 & 16 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Agora que o sistema está escalonado, podemos resolvê-lo:

$$16y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{16}.$$

Substituindo o valor de y na 1ª equação,

$$-x + 5 \cdot \frac{7}{16} = 2 \Rightarrow x = \frac{3}{16}$$

$$(x; y) = \left(\frac{3}{16}; \frac{7}{16} \right).$$

$$2) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -2x - y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ -2 & -1 & 3 & | & 2 \\ 3 & 4 & -2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Substituir a 2ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por 2 com a 2ª equação, ou $L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & 4 & -2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Substituir a 3ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por (-3) com a 3ª equação, ou $L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + z = 0 \\ -2y + z = -6 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Substituir a 3ª equação, pela soma do produto da 2ª equação por 2 com o produto da 3ª equação por 3, ou $L_3 \rightarrow 3L_3 + 2L_2$.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3y + z = 0 \\ 5z = -18 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & -18 \end{bmatrix}$$

Agora que o sistema está escalonado, podemos resolvê-lo:

$$5z = -18 \Rightarrow z = -\frac{18}{5}.$$

Substituindo o valor de y na 2ª equação,

$$3y - \frac{18}{5} = 0 \Rightarrow y = \frac{6}{5}.$$

Substituindo o valor de y e z na 1ª equação,

$$x + 2 \cdot \frac{6}{5} + \frac{18}{5} = 1 \Rightarrow x = -5$$

$$(x; y; z) = \left(-5; \frac{6}{5}; -\frac{18}{5}\right).$$

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Substituir a 2ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por 3 com a 2ª equação, ou $L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1$.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 4y + 5z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 5 & | & 3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Substituir a 3ª equação, pela soma do produto da 1ª equação por 2 com a 3ª equação, ou $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1$.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 4y + 5z = 3 \\ 4y + 5z = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 5 & | & 3 \\ 0 & 4 & 5 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Substituir a 3ª equação, pela soma do produto da 2ª equação por (-1) com a 3ª equação, ou $L_3 \rightarrow L_3 - L_2$.

$$\begin{cases} -x + y + 2z = 1 \\ 4y + 5z = 3 \\ 0 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 4 & 5 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é impossível.

8 Exercícios resolvidos

Verificar se $(-1; 2; 3)$ é solução de $3x + 7y - 5z = -4$.

Solução:

É solução, pois $3 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = -3 + 14 - 15 = -4$

2) Escrever, os sistemas a seguir, na forma matricial:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = a^2 \\ -x + 5y = ab \\ 6x - 2y = b^2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y + 2z + 5t = 3 \\ x - 2y + 5z - t = -2 \end{cases}$$

Solução:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 \\ ab \\ b^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3) Verificar se $(2; -3; 1)$ é solução do sistema $\begin{cases} 2x + y - 2z = -1 \\ x - 3y + z = 12 \\ 3x + 4y - 3z = -9 \end{cases}$

Solução:

$$\text{É solução, pois } \begin{cases} 2 \cdot 2 + (-3) - 2 \cdot 1 = -1 \\ 2 - 3 \cdot (-3) + 1 = 12 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 1 = -9 \end{cases}.$$

4) Verificar se $(0; 1; -2)$ é solução do sistema $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = -3 \\ 2x - 2y + 2z = -6 \\ 3x + 9y - z = 10 \end{cases}$

Solução:

$$\text{Não é solução, pois } \begin{cases} 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -3 \\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = -6 \\ 3 \cdot 0 + 9 \cdot 1 - (-2) = 11 \neq 10 \end{cases}.$$

Construir as matrizes incompleta e completa dos sistemas:

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$$

ução:

am A a matriz incompleta e B a matriz completa. Assim:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix}$$

9 Exercícios propostos

Verificar se $(-1; 1; -1; 1)$ é solução de $2x - 5y - 2z + 8t = 3$.

Determinar uma solução para a equação linear homogênea $3x - 2y - z = 0$, diferente de $(0; 0; 0)$.

Escrever os sistemas a seguir na forma matricial:

$$\begin{cases} 5x - y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + z = 8 \\ 2x - 5z = 3 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 3x - y + 4z = -5 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

$$4) \text{ Verificar se } (0; 2; -1) \text{ é solução do sistema } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = -3 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$5) \text{ Verificar se } (1; -1; 2) \text{ é solução do sistema } \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

6) Construir as matrizes incompleta e completa dos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + z = 8 \\ 2x - 5z = 3 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 3x - y + 4z = -5 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

7) Resolver, com o auxílio da Regra de Cramer, os seguintes sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x - y = 2 \\ -3x + 2y = -5 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = 3 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ x - 4y = -3 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4x + z = 8 \\ 2x - 5z = 3 \end{cases} \quad \text{f) } \begin{cases} 3x - y + 4z = -5 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 9 \end{cases}$$

) Escalone e resolva os seguintes sistemas:

$$) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 3y = -4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + y - 11z = -2 \end{cases}$$

$$) \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ 3x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - 2z = -5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 4x + 5y + z = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

2.10 Respostas dos exercícios propostos

) É solução.

) $(1; 1; 1)$, por exemplo.

$$) a) \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

) É solução.

) Não é solução (é falsa a última equação).

$$) a) \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$7) a) x = -\frac{1}{7} \text{ e } y = -\frac{19}{7}$$

$$d) x = 1, y = -1 \text{ e } z = 1$$

$$b) x = 1 \text{ e } y = 1$$

$$e) x = 4, y = 2 \text{ e } z = 1$$

$$c) x = \frac{43}{22} \text{ e } y = \frac{2}{11}$$

$$f) x = 2, y = -1 \text{ e } z = -3$$

$$8) a) x = \frac{2}{7} \text{ e } y = -\frac{10}{7}$$

$$c) x = -1, y = 1 \text{ e } z = 0$$

$$b) x = 1, y = -2 \text{ e } z = 1$$

$$d) x = 2, y = 0 \text{ e } z = -7$$

Binômio de Newton

Neste capítulo, será demonstrada a fórmula para obter o desenvolvimento de potências de um binômio $x + a$, de uma forma geral $(x + a)^n$, onde n é um número natural qualquer.

13.1 Fatorial

Dado $n \in \mathbb{N}$, chamaremos *fatorial de n* , e indicaremos por $n!$, o produto de n fatores decrescentes de n a 1.

$$\begin{cases} n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 & ; n > 1 \\ 1! = 1 \\ 0! = 1 \end{cases}$$

Exemplos:

- 1) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 120$
- 2) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10 \cdot 9! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7! = 3.628.800$
- 3) $(n+2)! = (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- 4) $(n-3)! = (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

13.2 Coeficientes binomiais

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$, tais que $n \geq p$.

Definição: Chama-se *coeficiente binomial de classe p do número n* , e indicamos por $\binom{n}{p}$, o número $\frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$.

emplos:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2} = 15$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

definição: Dois coeficientes binomiais são ditos *complementares* quando o da forma:

$$\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{n-p}$$

propriedade: Se dois coeficientes binomiais são complementares, então eles são iguais, isto é, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \binom{n}{n-p}$$

exemplos:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6!}{2!4!} = \binom{6}{2}$$

$$\binom{15}{9} = \frac{15!}{9!6!} = \frac{15!}{6!9!} = \binom{15}{6}$$

propriedade: Dados $n, a, b \in \mathbb{N}$, com $n \geq a$ e $n \geq b$, se $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$, então $a = b$ ou $a + b = n$.

Exemplo:

Se $\binom{n}{10} = \binom{n}{7}$, vamos determinar $\binom{n}{2}$.

Pela propriedade anterior, $n = 10 + 7 = 17$. Daí, $\binom{n}{2} = \binom{17}{2} = \frac{17!}{2!15!} = 136$.

Propriedade: (*Relação de Stifel*): Dados $n, p \in \mathbb{N}$ e $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exemplo:

Verifique a igualdade $\binom{15}{7} + \binom{15}{8} = \binom{16}{8}$.

$$\binom{15}{7} = \frac{15!}{7!8!} = 6.435; \quad \binom{15}{8} = \frac{15!}{8!7!} = 6.435; \quad \binom{16}{8} = \frac{16!}{8!8!} = 12.870.$$

Logo,

$$\binom{15}{7} + \binom{15}{8} = \binom{16}{8}$$

13.3 Triângulo de Pascal

Uma disposição prática de números binomiais, para o cálculo de seus valores e memorização de propriedades, é o *Triângulo de Pascal*, exemplificado a seguir:

$n \cdot P$	0	1	2	3	4	$n \cdot P$	0	1	2	3	4
0	$\binom{0}{0}$					0	1				
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$				1	1	1			
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$			2	1	2	1		
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$		3	1	3	3	1	
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	4	1	4	6	4	1

Observando a tabela anterior, formamos o seguinte triângulo:

1
 1 1
 1 2 1
 1 3 3 1
 1 4 6 4 1

Observemos como esse triângulo é formado:

A primeira coluna é toda 1.

As colunas subsequentes são formadas a partir da soma dos dois elementos da linha anterior. Vejamos:

$\boxed{+0}$	1	1	1	1	1	1
$\downarrow$	$\boxed{1+1}$	$\boxed{1+2}$	$\boxed{1+3}$	$\boxed{1+0}$	$\boxed{2+1}$	
1	1	1	1	1	1	
	1	2	3	3	4	
	1	3	6	6	10	
	1	4	10	10	21	

1	1	1	1	1	1
1 1	1 1	1 2	$\boxed{1+0}$		
1 2 1	1 2 1	1 3	$\boxed{3+1}$		
1 3 3 1	1 3 3 1	1 4	4		
1 4 6	1 4 6	1 4 6	4		

A partir daí, podemos mostrar o Triângulo de Pascal com quantas linhas quisermos (ou para n qualquer).

Montemos, por exemplo, o Triângulo de Pascal com $n = 8$, fazendo as somas vistas anteriormente:

$n \cdot P$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Localizemos, por exemplo, o número 35 que se encontra assinalado. Ele é o resultado da combinação de 7 ($n = 7$), 4 a 4 ($p = 4$) ou $C_7^4 = \binom{7}{4} = 35$. Outro exemplo: $28 = C_8^6 = \binom{8}{6}$. E assim, sucessivamente.

Esse triângulo facilitará bastante o entendimento e o cálculo do Binômio de Newton.

3.4 Binômio de Newton

seja $n \in \mathbb{N}$.

$$(x+a)^0 = 1$$

$$(x+a)^1 = 1x + 1a$$

$$(x+a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$$

$$(x+a)^3 = 1x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + 1a^3$$

$$(x+a)^4 = 1x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + 1a^4$$

$$(x+a)^5 = 1x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + 1a^5$$

Notemos que os coeficientes das expansões dessas potências são os números que aparecem no Triângulo de Pascal.

Assim:

$$\boxed{n=0} \quad (x+a)^0 = \binom{0}{0} = 1$$

$$\boxed{n=1} \quad (x+a)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a = 1x + 1a$$

$$\boxed{n=2} \quad (x+a)^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xa + \binom{2}{2}a^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$$

Observações:

-) Os expoentes de x começam com n e decrescem até zero e os expoentes de a são ao contrário.
-) O número de termos do desenvolvimento será sempre igual a $n+1$.
-) Quando n for par, existirá apenas um termo médio ou central; quando n for ímpar, existirão dois.

Observando os desenvolvimentos mostrados anteriormente, monte uma forma geral para $(x+a)^n$, onde $n \in \mathbb{N}$ qualquer:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Exemplos:

Desenvolva os seguintes binômios:

$$\begin{aligned} 1) \quad (x+2)^7 &= \binom{7}{0}x^7 + \binom{7}{1}x^6 \cdot 2 + \binom{7}{2}x^5 \cdot 2^2 + \binom{7}{3}x^4 \cdot 2^3 + \binom{7}{4}x^3 \cdot 2^4 \\ &\quad + \binom{7}{5}x^2 \cdot 2^5 + \binom{7}{6}x \cdot 2^6 + \binom{7}{7}2^7 = 1 \cdot x^7 + 7 \cdot x^6 \cdot 2 + 21 \cdot x^5 \cdot 4 + 35 \cdot x^4 \cdot 8 \\ &\quad + 35 \cdot x^3 \cdot 16 + 21 \cdot x^2 \cdot 32 + 7 \cdot x \cdot 64 + 1 \cdot 128 = x^7 + 14x^6 + 84x^5 \\ &\quad + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (2x^2 - a^2)^4 &= (2x^2 + (-a^2))^4 = \binom{4}{0}(2x^2)^4 + \binom{4}{1}(2x^2)^3(-a^2) \\ &\quad + \binom{4}{2}(2x^2)^2(-a^2)^2 + \binom{4}{3}(2x^2)(-a^2)^3 + \binom{4}{4}(-a^2)^4 = 1(16x^8) \\ &\quad + 4(8x^6)(-a^2) + 6(4x^4)(a^4) + 4(2x^2)(-a^6) + 1(a^8) = \\ &= 16x^8 - 32x^6a^2 + 24x^4a^4 - 8x^2a^6 + a^8 \end{aligned}$$

13.5 Termo geral

Vimos que:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^na^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{n-2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{n-1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{n}x^0a^n$$

Assim:

$$T_1 = \binom{n}{0}x^na^0 \quad (1^\circ \text{ termo})$$

$$T_2 = \binom{n}{1}x^{n-1}a^1 \quad (2^\circ \text{ termo})$$

$$T_3 = \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 \quad (3^\circ \text{ termo})$$

$$T_4 = \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 \quad (4^\circ \text{ termo})$$

$$T_5 = \binom{n}{4}x^{n-4}a^4 \quad (5^\circ \text{ termo})$$

Logo,

$$T_p = \binom{n}{p-1} x^{n-(p-1)} a^{p-1} \quad (\text{termo } p)$$

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p \quad (\text{termo } p+1)$$

13.6 Exercícios resolvidos

1) Simplifique:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{15!}{13!} & \text{d) } \frac{(n+3)!}{(n-3)!} \\ \text{b) } \frac{15!}{10!5!} & \text{e) } \frac{(n-2)!}{(n+1)!} \\ \text{c) } \frac{(n+2)!}{n!} \end{array}$$

Solução:

Substituindo os termos fatoriais:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{15!}{13!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13!}{13!} = 15 \cdot 14 = 210 \\ \text{b) } \frac{15!}{10!5!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 11 = 3.003 \\ \text{c) } \frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n!}{n!} = (n+2) \cdot (n+1) \\ \text{d) } \frac{(n+3)!}{(n-3)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = \\ = (n+3) \cdot (n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \\ \text{e) } \frac{(n-2)!}{(n+1)!} = \frac{(n-2)!}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!} = \frac{1}{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)} \end{array}$$

2) Resolva as equações:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x! = 720 & \text{c) } \frac{x!}{(x-1)!} = 3 \end{array}$$

$$\text{b) } (x-5)! = 1$$

$$\text{d) } [(x+2)! - (x+1)!] \cdot x! = 24^2$$

Solução:

a) $x! = 720$. Como $720 = 6!$, temos:

$$x! = 6! \Rightarrow x = 6$$

b) Como $1! = 1$ e $0! = 1$, temos:

$$(x-5)! = 1! \text{ ou } (x-5)! = 0! \Rightarrow x-5=1 \text{ ou } x-5=0 \Rightarrow x=6 \text{ ou } x=5$$

$$\text{c) } \frac{x!}{(x-1)!} = 3 \Rightarrow \frac{x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } [(x+2)! - (x+1)!] \cdot x! &= 24^2 \Rightarrow [(x+2) \cdot (x+1)! - (x+1)!] \cdot x! = 24^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+1)! \cdot [x+2-1] \cdot x! = 24^2 \Rightarrow (x+1)! \cdot (x+1) \cdot x! = 24^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x+1)! \cdot (x+1)! = 24^2 \Rightarrow [(x+1)!]^2 = 24^2 \Rightarrow (x+1)! = 24 = 4! \Rightarrow \\ &\Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

3) Determine o 5º termo da expansão $(x-1)^{10}$.

Solução:

$$(x-1)^{10} = (x+(-1))^{10} \Rightarrow T_5 = ?$$

Utilizando a fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$ e, como queremos determinar o 5º termo, então:

$$p+1=5 \Rightarrow p=4$$

$$T_5 = \binom{10}{4} x^{10-4} (-1)^4 = 210 \cdot x^6 \cdot 1 = 210x^6$$

4) Determine o 10º termo de $(y^2-2)^{12}$.

Solução:

$$(y^2-2)^{12} = (y^2+(-2))^{12} \Rightarrow T_{10} = ?$$

Usando a fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$ e como queremos determinar o 10º termo, então:

$$p+1=10 \Rightarrow p=9$$

$$T_{10} = \binom{12}{9} (y^2)^{12-9} (-2)^9 = 220 \cdot (y^2)^3 \cdot (-512) = -112.640y^6$$

) Determine o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x-2)^{13}$.

Solução:

$$(x-2)^{13} = (x+(-2))^{13} \Rightarrow p = ?$$

Utilizando a fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$, primeiro vamos

determinar o valor de p :

$$T_{p+1} = \binom{13}{p} x^{13-p} (-2)^p \Rightarrow 13-p=5 \Rightarrow p=8.$$

Como $p=8$, determinaremos o 9º termo:

$$T_9 = \binom{13}{8} x^5 (-2)^8 = 1.287 \cdot x^5 \cdot 256 = 329.472 x^5$$

) Encontre o coeficiente de x^5 na expansão de $\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7$.

Solução:

$$\left(\frac{2}{x} + x^3\right)^7 = (2x^{-1} + x^3)^7 \Rightarrow p = ?$$

Empregando a fórmula do termo geral $T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} a^p$, primeiro vamos determinar o valor de p :

$$T_{p+1} = \binom{7}{p} (2x^{-1})^{7-p} (x^3)^p = \binom{7}{p} 2^{7-p} x^{p-7} x^{3p} = \binom{7}{p} 2^{7-p} x^{4p-7}$$

$$4p-7=5 \Rightarrow p=3$$

Como $p=3$, determinaremos o 4º termo:

$$T_4 = \binom{7}{3} 2^4 x^5 = 560 x^5$$

7) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento do binômio

$$\left(5x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4.$$

Solução:

$$\left(5x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^4 = (5x^2 - x^{-2})^4 = (5x^2 + (-x^{-2}))^4 \Rightarrow p = ? \text{ (para } x^0)$$

$$T_{p+1} = \binom{4}{p} (5x^2)^{4-p} (-x^{-2})^p.$$

$$\text{Como } (5x^2)^{4-p} = 5^{4-p} x^{8p-2p} \text{ e } (-x^{-2})^p = (-1)^p x^{-2p},$$

$$\begin{aligned} T_{p+1} &= \binom{4}{p} (5x^2)^{4-p} (-x^{-2})^p = \binom{4}{p} 5^{4-p} x^{8p-2p} (-1)^p x^{-2p} = \\ &= \binom{4}{p} 5^{4-p} (-1)^p x^{8-2p} x^{-2p} = \binom{4}{p} 5^{4-p} (-1)^p x^{8-4p} \end{aligned}$$

$$8-4p=0 \Rightarrow p=2$$

Como $p=2$, determinaremos o 3º termo:

$$T_3 = \binom{4}{2} 5^2 (-1)^2 x^0 = 6 \cdot 25 \cdot 1 = 150$$

8) Seja o binômio $(a+b)^n$. Determinar a soma dos coeficientes da expansão binomial, sendo $a=b=1$.

Solução:

Sabemos que:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \\ &+ \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \end{aligned}$$

Se fizermos $a=b=1$, teremos:

$$\begin{aligned} (1+1)^n &= 2^n = \binom{n}{0} 1^n 1^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1} 1^1 1^{n-1} + \binom{n}{n} 1^0 1^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}. \end{aligned}$$

) Desenvolva os seguintes binômios:

$$(x^3 + 2)^5$$

$$(x^2y - z^3)^4$$

$$\left(3x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$$

) Determinar o termo do desenvolvimento de $(2x^2 - y^3)^8$ que contém x^{10} .

) Determinar o 5º termo de $(x^2 + 5y^3)^8$.

) Determinar o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x}\right)^{10}$.

) No desenvolvimento de $\left(2x^4 + \frac{3}{x^3}\right)^{14}$, determinar o termo:
em x^{21} ;
independente de x ;
médio.

) No desenvolvimento de $(2x + 3y)^n$, segundo potências decrescentes de x , os coeficientes binomiais do 14º e do 28º termos são iguais. Calcular a soma dos coeficientes numéricos da expressão.

) Determinar o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{10} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

) Calcular o valor de:

$$\binom{40}{0}7^{40} + \binom{40}{1}7^{39} \cdot 4 + \binom{40}{2}7^{38} \cdot 4^2 + \dots + \binom{40}{38}7^2 \cdot 4^{38} + \binom{40}{39}7 \cdot 4^{39} + \binom{40}{40}4^{40}$$

) O 4º termo do desenvolvimento de $(x + y)^6$ é 540. Sabendo-se que $(x + y)^5 = 2^{10}$, determine $|x - y|$.

20) Determine o valor numérico do polinômio $x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 +$ quando $x = \frac{\sqrt{13} + 4}{\sqrt[4]{2}}$ e $y = \frac{\sqrt{13} - 4}{\sqrt[4]{2}}$.

13.8 Respostas dos exercícios propostos

- | | |
|---|--|
| 1) a) 5.040 | c) 840 |
| b) 40.320 | d) -3.024 |
| 3) a) 43.680 | d) $(n+5) \cdot (n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)$ |
| b) $\frac{1}{990}$ | e) $\frac{1}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)}$ |
| c) 364 | f) $\frac{1}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}$ |
| 4) a) $-\frac{1}{6 \cdot 4!}$ | d) $\frac{n^2 + 2n + 2}{n}$ |
| b) $\frac{40}{3}$ | e) $n - 1$ |
| c) $\frac{1}{(n+1) \cdot (n-1)!}$ | |
| 5) a) {5} | d) {6} |
| b) { } | e) {8} |
| c) {10} | |
| 7) a) 4 | b) 220 |
| 8) a) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ | b) {0} |
| 9) $n = 3$ | |
| 10) a) {2} | c) {1; 4} |
| b) {1} | d) { } |

11) a) $x^{15} + 10x^{12} + 40x^9 + 80x^6 + 80x^3 + 32$

b) $x^8y^4 - 4x^6y^3z^3 + 6x^4y^2z^6 - 4x^2yz^9 + z^{12}$

c) $729x^{12} + 2.916x^9 + 4.860x^6 + 4.320x^3 + 2.160 + 576x^{-3} + 64x^{-6}$

12) $-1.792y^9x^{10}$

13) $43.750x^8y^{12}$

14) 45

15) a) $\binom{14}{5} \cdot 2^9 \cdot 3^5 \cdot x^{21}$

b) $\binom{14}{8} \cdot 2^6 \cdot 3^8$

c) $\binom{14}{7} \cdot 2^7 \cdot 3^7 \cdot x^7$

16) 5^{40}

17) $-\binom{10}{5}$

18) 11^{40}

19) 2

20) 2.048